

పదోతరగతి గణితం

రెండు చరరాశుల్లో రేఖీయ సమీకరణాల జత

గణిత శాస్త్రంలో అయిదు రకాల విద్యా ప్రమాణాలున్నాయి. అవి.. 1) సమస్య సాధన, 2) కారణాలు చెప్పడం - నిరూపణ చేయడం, 3) వ్యక్తపరచడం, 4) అనుసంధానం, 5) దృశ్యీకరణ - ప్రాతినిధ్య పరచడం. పుస్తకంలో ఉన్న ప్రశ్నలను అదే విధంగా ఇవ్వకుండా పై అయిదు విద్యా ప్రమాణాల్లోకి మార్చి ఇస్తారు. కాబట్టి సమస్యను అర్థం చేసుకుని ఆ విద్యా ప్రమాణంలోనే జవాబు రాయాలి.

★ రెండు చరరాశులు ఉన్నప్పుడు ఒకే ఒక సాధన కావాలంటే కనీసం రెండు స్వతంత్ర సమీకరణాలు కావాలి.

★ సాధారణంగా $ax + by + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ & $a \neq 0, b \neq 0$) సమీకరణాన్ని రెండు చరరాశుల్లో రేఖీయ సమీకరణం అంటారు.

ప్ర: $x - y = 1$ & $x - 2y = -2$ లను సాధించండి.

జ: $x - y = 1$ (1)

$x - 2y = -2$ (2)

$$\begin{array}{r} - \\ + \\ + \\ \hline y = 3 \end{array} \quad (1) - (2) \text{ చేయగా}$$

(1) లో రాయగా $x - 3 = 1$

$$x = 1 + 3 = 4$$

\therefore సాధన $x = 4$ & $y = 3$

★ పై సమస్యను వేరే విధంగా అడగాలంటే, పై సమీకరణాల జత ఖండన రేఖలా? సమాంతరాలా? లేదా ఏకీభవించే రేఖలా? సరిచూడండి.

$$x - y - 1 = 0, x - 2y + 2 = 0 \text{ ఇవి}$$

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, & $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ రూపంలో ఉన్నాయి.

$$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = -1, a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

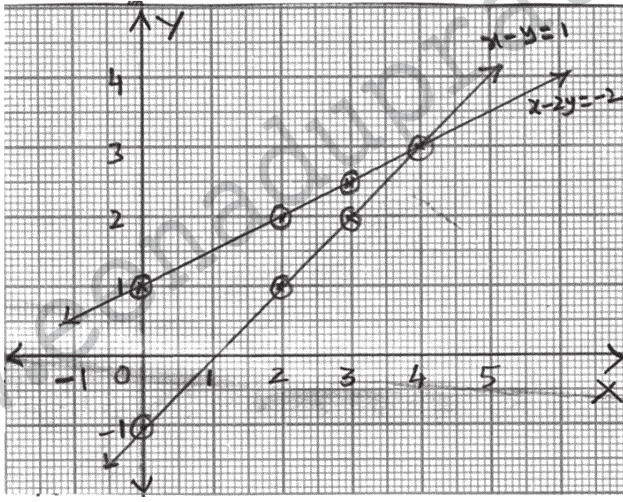
$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

\therefore పై సమీకరణాల జత ఖండన రేఖలను సూచిస్తుంది. వీటికి ఒకే ఒక సాధన ఉంటుంది.

★ ఇదే సమస్యను గ్రాఫ్ ద్వారా సాధించండి.

x - y = 1 సమీకరణానికి		
x	y = x - 1	x, y
0	y = -1	(0, -1)
2	y = 1	(2, 1)
3	y = 2	(3, 2)
4	y = 3	(4, 3)

x - 2y = -2 సమీకరణానికి		
x	y = $\frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	y = 1	(0, 1)
2	y = $\frac{4}{2} = 2$	(2, 2)
3	y = $\frac{5}{2}$	$(3, \frac{5}{2})$
4	y = 3	(4, 3)



ప్ర: కింది రేఖీయ సమీకరణాల జతల్లో ఏది సంగత రేఖీయ సమీకరణాల జత, ఏది అసంగత రేఖీయ సమీకరణాల జత? ఏది పరస్పర ఆధారిత సమీకరణాల జత? ఎందుకు?

(i) $4x - 6y = 15$ (ii) $x + 2y = 6$

$2x - 3y = 5$ $2x + 4y = 12$

(iii) $x + 2y - 7 = 0$

$4x - 3y - 6 = 0$

జ: పై సమీకరణాల జతలను $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ & $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ రూపంలో రాసుకుని

(i) $a_1 = 4, b_1 = -6, c_1 = -15$

$a_2 = 2, b_2 = -3, c_2 = -5$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = 2,$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = 3$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

ఇవి అసంగత సమీకరణాల జత, వీటికి సాధన లేదు. వీటి రేఖాచిత్రం సమాంతర రేఖలు.

$$(ii) a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -6$$

$$a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = -12$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

\therefore ఇవి పరస్పర ఆధారిత సమీకరణాల జత. వీటికి అసంత సాధనలు ఉంటాయి. అంటే ఇవి ఏకీభవించే రేఖలు.

$$(iii) a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -7$$

$$a_2 = 4, b_2 = -3, c_2 = -6$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

\therefore ఇవి ఖండన రేఖలు. అంటే సంగత సమీకరణాల జత.

\therefore ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

ప్ర: పెన్సిల్ వెల రూ. x, పెన్ను వెల రూ. y అయితే, కింది రేఖాయిత సమీకరణాల జతను మాటల్లో రాయండి.

$$2x + 3y = 24 ; \quad 3x + 5y = 39$$

జ: రెండు పెన్సిళ్లు, మూడు పెన్నుల వెల మొత్తం = రూ. 24

మూడు పెన్సిళ్లు, అయిదు పెన్నుల వెల మొత్తం = రూ. 39

ప్ర: ఒక కోణం 24° , మరొక కోణం 66° అయితే, ఆ కోణాలను ఏమంటారు?

జ: పూరక కోణాలు అంటారు. (ఒక కోణం x అయితే, దాని పూరక కోణం = $90 - x$)

ప్ర: ఒక కోణం x° అయితే దాని సంపూరక కోణం ఎంత?

జ: $180^\circ - x$

రచయిత: పి.వేణుగోపాల్

పదోతరగతి గణితం

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత

ప్ర: నువ్వు షాప్ కు వెళ్లి 1 పెన్, 1 పెన్సిల్ కొని రూ.7 ఇచ్చావు. అలాంటివే నీ మిత్రురాలు శోధన 5 పెన్నులు, 2 పెన్సిళ్లను కొని రూ.20 ఇచ్చింది. వీటిని రేఖీయ సమీకరణాలలో చూపించి, ఏ పద్ధతి ద్వారా నైనా సాధించండి.

జ: పెన్ను వెల = రూ. x

పెన్సిల్ వెల = రూ. y అనుకుందాం

$$x + y = 7 \dots\dots\dots(1)$$

$$5x + 2y = 20 \dots\dots\dots(2)$$

$$(2) - (1) \times 2$$

$$5x + 2y = 20$$

$$\underline{2x + 2y = 14}$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

x విలువను (1) లో రాయగా $2 + y = 7$

$$\therefore y = 7 - 2 = 5$$

ప్ర: $2x + 3y = 1$, $3x - y = 7$ రేఖీయ సమీకరణాల జతను సాధించండి.

(ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి/ చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి/ చరరాశిని పోల్చే పద్ధతి/ సూత్ర పద్ధతి ఆధారంగా.)

జ: i) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి: $2x + 3y = 1 \dots\dots\dots(1)$

$$3x - y = 7 \dots\dots\dots(2)$$

$$(2) \text{ నుంచి } y = 3x - 7$$

y విలువను (1) లో రాయగా

$$2x + 3(3x - 7) = 1$$

$$2x + 9x - 21 = 1$$

$$11x = 1 + 21$$

$$11x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{11} = 2$$

x విలువను (1) లో రాయగా

$$2(2) + 3y = 1$$

$$3y = 1 - 4$$

$$3y = -3$$

$$y = \frac{-3}{3} = -1$$

ii) చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి:

$$2x + 3y = 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$3x - y = 7 \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) + (2) \times 3$$

$$2x + 3y = 1$$

$$\frac{9x - 3y = 21}{11x = 22 \Rightarrow x = \frac{21}{11} = 2}$$

x విలువను (2) లో రాయగా

$$3(2) - y = 7$$

$$-y = 7 - 6$$

$$y = -1$$

iii) చరరాశిని పోల్చే పద్ధతి: (1) సమీకరణం నుంచి..

$$2x = 1 - 3y$$

$$x = \frac{1 - 3y}{2} \dots\dots\dots(3)$$

(2) సమీకరణం నుంచి..

$$3x = 7 + y$$

$$x = \frac{7 + y}{3} \dots\dots\dots(4)$$

(3), (4) ల నుంచి..

$$\frac{1 - 3y}{2} = \frac{7 + y}{3}$$

$$3 - 9y = 14 + 2y$$

$$-9y - 2y = 14 - 3$$

$$-11y = 11 \Rightarrow y = -1$$

$y = -1$ ను (4) లో రాయగా

$$x = \frac{7-1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

iv) సూత్ర పద్ధతి:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$\text{సాధన: } x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$2x + 3y - 1 = 0$$

$$3x - y - 7 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad | \quad b_1 = 3 \quad | \quad c_1 = -1$$

$$a_2 = 3 \quad | \quad b_2 = -1 \quad | \quad c_2 = -7$$

$$\therefore x = \frac{3(-7) - (-1)(-1)}{2(-1) - 3(3)} = \frac{-21 - 1}{-2 - 9} = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$y = \frac{-1 \times 3 - (-7) 2}{2(-1) - 3 \times 3} = \frac{-3 + 14}{-2 - 9} = \frac{11}{-11} = -1$$

ప్ర: $5x + 2y + 7 = 0$, $10x + 4y - P = 0$ రేఖీయ సమీకరణాల జత ఏకీభవించే రేఖలు కావాలంటే $P = ?$

$$\text{జ: } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{2}{4} = \frac{7}{-P}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{7}{-P} \Rightarrow -P = 14$$

$$\therefore P = -14$$

ప్ర: అసంగత సమీకరణాల జతకు ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

$$\text{జ: } 5x + 3y = 5$$

$10x + 6y = 20$ ఎందుకంటే $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ కాబట్టి.

ప్ర: రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఏకైక సాధన కావాలంటే నియమాలు ఏమిటి?

జ: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ కావాలి.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. రెండు చరరాశుల్లో రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఒకే సాధన ఉంటే వాటిని ఏమంటారు?

(i) ఖండన రేఖలు

(ii) సమాంతర రేఖలు

(iii) సంగత సమీకరణాలు

(iv) అసంగత సమీకరణాలు

A) i & ii

B) ii & iii

C) i & iii

D) i & iv

2. రెండు సమీకరణాల జతకు సాధన లేకుంటే వాటిని ఏమంటారు?

A) అసంగత సమీకరణాలు

B) సంగత సమీకరణాలు

C) ఏకీభవించే రేఖలు

D) ఏదీకాదు

3. P యొక్క ఏ విలువకు $(P - 1)x + 3y = 7$

$$(P + 1)x + 6y = (5P - 1)$$

అసంతసాధనాలు ఉంటాయి?

A) $P = 1$

B) $P = 2$

C) $P = 3$

D) $P = -1$

జవాబులు: 1-C ; 2-A ; 3-C.

రచయిత: పి. వేణుగోపాల్