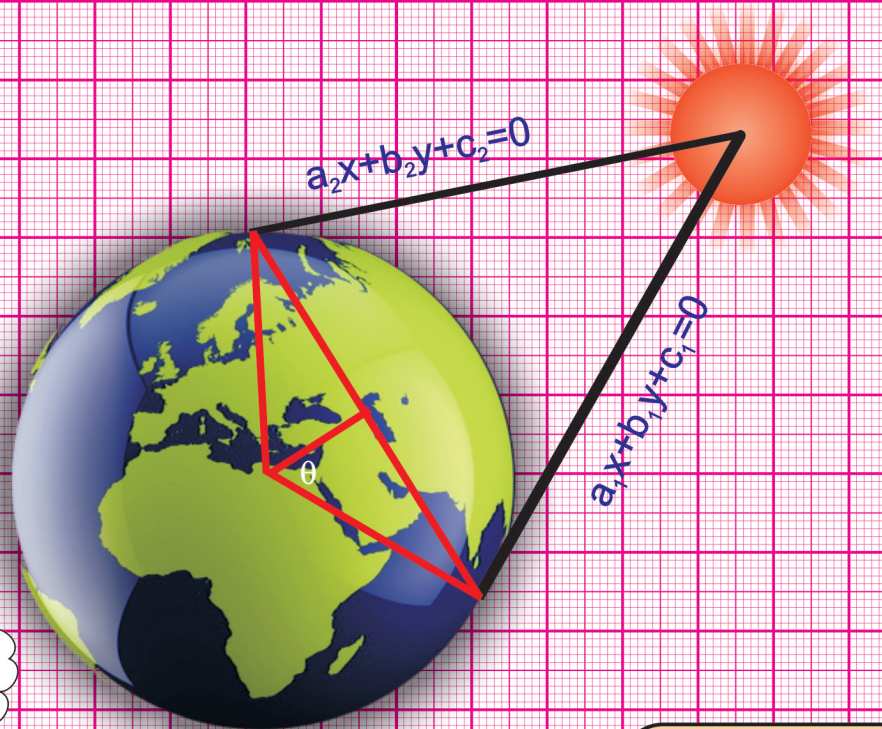


గణిత శాస్త్రం

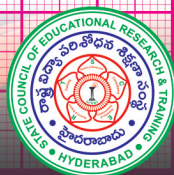
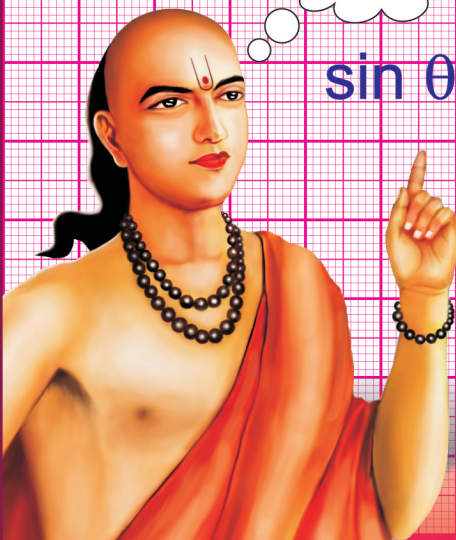
అభ్యాస చీపిక

(Enrichment Material)

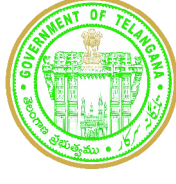


Ardha-jya

$\sin \theta$



రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ,
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.



గణితశాస్త్రం

అభ్యాస దీపిక

10వ తరగతి



రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణా సంస్థ

తెలంగాణ, హైదరాబాద్.



విద్యాశాఖామాత్యులు
తెలంగాణ ప్రభుత్వం



సందేశం

ప్రస్తుత విద్యా సంవత్సరం ప్రత్యేక పరిస్థితుల దృష్ట్యా, ప్రత్యామ్నాయ రీతుల ద్వారా వివిధ విషయాలలో పాఠాలను అందచేయాలనే లక్ష్యంతో వర్క్ షీట్లు మరియు డిజిటల్ తరగతులు అందుబాటులో ఉంచబడ్డాయి. ఇప్పుడు వార్షిక పరీక్షలు సమీపిస్తున్న కారణంగా, పదవ తరగతి విద్యార్థులకు స్వీయ అభ్యాసాన్ని సులభతరం చేయడానికి, SCERT, TS భాషేతర విషయాల యొక్క అన్ని ముఖ్య భావనలను సంకలనం చేసి ఈ 'అభ్యాస దీపిక'ను రూపొందించింది.

అన్ని సంక్లిష్ట మరియు సంక్షోభాల సమయంలో, ఉపాధ్యాయులు తాము ముందు ఉండి, అభ్యాసనం జరిగేలా తమ వంతు కృషి చేస్తున్నారు. అదే విధంగా వారు ఈ అభ్యాస సామగ్రి యొక్క అంశాలను అర్థం చేసుకోవడానికి విద్యార్థులకు మార్గనిర్దేశం చేయవచ్చు. వివిధ విషయాలలో సహాయం అవసరమైన వారికి, వారి పనితీరును మెరుగుకోవడానికి ఈ అభ్యాస సామగ్రి చాలా ఉపయోగపడుతుంది. దీనిని ఉపయోగించుకొని విద్యార్థులు మంచి ఫలితాలను సాధిస్తారని నేను ఆశిస్తున్నాను.

ఏప్రిల్, 2021

హైదరాబాదు.

పట్టోళ్ల సబితా ఇంద్రారెడ్డి

విద్యాశాఖామాత్యులు,

తెలంగాణ ప్రభుత్వం



ముఖ్య కార్యదర్శి,
తెలంగాణ ప్రభుత్వం



సందేశం

అన్ని ఇతర రంగాలతో పాటు, COVID-19 పరిస్థితి వల్ల విద్యా రంగం కూడా తీవ్రంగా ప్రభావితమైంది. మొత్తం వ్యవస్థ అంతా, విద్యార్థులను చేరుకోవడం మరియు నాణ్యమైన విద్యను అందించడం ద్వారా విద్యా సంవత్సరాన్ని కాపాడటానికి కష్టపడుతోంది. వీలైనంత ఎక్కువ రోజులు ముఖాముఖి తరగతులను జరపటంతో పాటు వివిధ ఆన్‌లైన్, సామాజిక, పబ్లిక్ మరియు ఎలక్ట్రానిక్ మీడియా ద్వారా విద్యార్థులను చేయడంలో ఉపాధ్యాయులు కీలక పాత్ర పోషిస్తున్నారు. పరీక్షలను ఎదుర్కోవటానికి ఉపాధ్యాయులను మరియు విద్యార్థులను సన్నద్ధం చేయడానికి పదవ తరగతి కోసం SCERT, TS 'అభ్యాస దీపిక'ను రూపొందించింది. దీనిని ఉపయోగించి విద్యార్థులు వివిధ సబ్జెక్టులలోని ప్రతి యూనిట్‌లోని ముఖ్య అంశాలపై అవగాహనను పెంచుకోవచ్చు. అవసరమైన చోట ఉపాధ్యాయుల సహాయంతో స్వీయ మదింపు చేసుకోవడానికి అభ్యాస ప్రశ్నలు ఇక్కడ ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ అభ్యాస సామగ్రి షహాయంతో విద్యార్థులు విజయం సాధిస్తారని ఆశిస్తున్నాను.

ఏప్రిల్, 2021
హైదరాబాదు.

శ్రీమతి చిత్రా రామచంద్రన్, ఐఏఎస్
ముఖ్య కార్యదర్శి,
విద్యాశాఖ, తెలంగాణ



పాఠశాల విద్య,
తెలంగాణ ప్రభుత్వం



సందేశం

SCERT, తెలంగాణ, ఈ 'అభ్యాస దీపిక'ను భాషేతర విషయాలలో ముఖ్య భావనల యొక్క సమర్థవంతమైన అవగాహనను సులభతరం చేయడంలో ఉపాధ్యాయులకు మరియు విద్యార్థులకు తోడ్పడటానికి సిద్ధం చేసింది. కోవిడ్ 19 పరిస్థితి కారణంగా ఉన్న ప్రత్యేక పరిస్థితుల కారణంగా, ప్రస్తుత విద్యా సంవత్సరానికి పరీక్షల సిలబస్ 30% వరకు తగ్గించబడింది. మిగిలిన 70% సిలబస్ నుండి 'అభ్యాస దీపిక'ను తయారు చేయబడింది. ఇది అభ్యాసకులు స్వీయ అభ్యాసం ద్వారా అన్ని ముఖ్య అంశాలను సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి సహాయపడుతుంది. విద్యార్థులు ఈ దీపికను ఉపయోగించుకుంటారని మరియు పరీక్షలలో విజయం పొందాలని కోరుకుంటున్నాను.

ఏప్రిల్, 2021
హైదరాబాదు.

శ్రీమతి ఎ. శ్రీదేవసేన, ఐఎఎస్
సంచాలకులు, పాఠశాల విద్య,
తెలంగాణ

ముందుమాట

ప్రస్తుత కోవిడ్-19 పరిస్థితులలో 10వ తరగతి విద్యార్థులు వార్షిక పరీక్షలలో ఉత్తమ ఫలితాలు సాధించాలన్న ఉద్దేశ్యంతో ఈ సంగ్రహణాత్మక అభ్యాస దీపికను రూపొందించడం జరిగింది.

సెప్టెంబరు 1, 2020 నుండి విద్యార్థులకు TSAT మరియు దూరదర్శన్ ఛానెళ్ళ ద్వారా ఆన్లైన్ తరగతులు ప్రసారం చేయడం జరుగుతుంది. ఇదేగాకుండా జిల్లా విద్యాధికారుల ప్రయత్నం వల్ల యూట్యూబ్లో ఆయా సబ్జెక్టులకు సంబంధించిన పాఠ్యాంశాలు విషయనిపుణులచే చెప్పించడం జరిగింది. వీటన్నిటి ఉద్దేశం పిల్లలు ఆయా తరగతులలో నిర్దేశించిన సామర్థ్యాలు సాధించడం. అలాగే ఫిబ్రవరి 1, 2021 నుండి ప్రత్యక్ష తరగతులు నిర్వహించడం జరిగింది. కాని తక్కువ సమయంలో అన్ని భావనలపై అవగాహన కల్పించడం సాధ్యపడలేదు. ఇలాంటి పరిస్థితులలో విద్యార్థులకు కొంతవరకు ఆ లోటును భర్తీ చేయడానికి ఈ అభ్యాస దీపిక రూపొందించబడింది.

అభ్యాస దీపికలోని భావనలు విద్యార్థులు మంచి ఫలితాలు సాధించడానికి దోహదపడతాయి. గణితశాస్త్రంలో 14 అధ్యాయాలున్నాయి. వీటిలోని కొన్ని భావనలను (30% సిలబస్) కృత్యాలు / ప్రాజెక్టు కింద ఇవ్వడం జరిగింది. వీటి నుండి FA మరియు SA పరీక్షలకు ప్రశ్నలు ఇవ్వబడవు. ఈ 14 అధ్యాయాలలో మిగిలిన 70% సిలబస్ పబ్లిక్ పరీక్షలకు ఉద్దేశించబడినది. ఈ అభ్యాస దీపిక విద్యా ప్రమాణాలు ఆధారంగా తయారుచేయడం జరిగింది. వర్క్ షీట్స్, డిజిటల్ తరగతులు, తరగతి బోధన ప్రక్రియల ద్వారా పొందిన జ్ఞానాన్ని మరింత బలోపేతం చేయడానికి స్వీయ అభ్యసన సామగ్రి అందించబడుతుంది. పాఠ్యాంశాల వారీగా భావనలు గుర్తించి, వాటికి తగిన వివరణ ఇవ్వడం, అలాగే ప్రతి అధ్యాయంలోని నిర్వచనాలు, సూత్రాలు, అందులోని పదాలను కూడా పొందుపరచడం జరిగింది. ఈ అభ్యాస దీపికను సులభంగా విద్యార్థుల అవగాహన కొరకు తయారు చేయడం జరిగింది.

కాబట్టి ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు ఈ అభ్యాస దీపికను పూర్తిగా చదివి, ఉపాధ్యాయులు విద్యార్థులకు మార్గదర్శకత్వం చేస్తారని, అలాగే విద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయులు సూచించిన మార్గంలో మంచి ఫలితాలు సాధిస్తారని ఆశిస్తూ...

ఎమ్. రాధారెడ్డి,

సంచాలకులు

రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణాసంస్థ,

తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

కృతజ్ఞతలు

శ్రీమతి పి. సబితా ఇంద్రారెడ్డి, గౌరవనీయ విద్యాశాఖామాత్యులు, శ్రీమతి చిత్రా రామచంద్రన్, ప్రభుత్వ ప్రత్యేక ముఖ్య కార్యదర్శి, విద్యాశాఖ, శ్రీమతి ఎ. శ్రీదేవసేన, సంచాలకులు, పాఠశాల విద్య గార్లకు ఈ అభ్యాస దీపిక రూపొందించడంలో వారు అందించిన విలువైన మార్గదర్శకత్వం మరియు సహాయానికై రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణాసంస్థ, తెలంగాణ తరపున ప్రత్యేక కృతజ్ఞతలు తెలియజేసుకుంటున్నాం.

10వ తరగతి విద్యార్థుల కొరకు ఈ అభ్యాస దీపికను రూపొందించడంలో మరియు Activity/project based syllabus రూపకల్పనలో మార్గదర్శకత్వం, సహకారం అందించిన అందరు అదనపు సంచాలకులు శ్రీ ఎ.సత్యనారాయణ రెడ్డి గారికి, శ్రీ సి. హెచ్. రమణ కుమార్ గారికి, శ్రీ పి.వి.శ్రీహరి గారికి, శ్రీ ఎ. కృష్ణారావు మరియు శ్రీమతి జి. ఉషారాణి గారికి హృదయపూర్వక కృతజ్ఞతలు తెలియజేసుకుంటున్నాం.

శ్రీ సురేష్ బాబు, కన్సల్టెంట్, SLA, SCERT; శ్రీ హెచ్. నరేంద్రరావు ఖత్రి, కన్సల్టెంట్, SCERT; ఫాకల్టీ, పాఠ్యప్రణాళిక మరియు పాఠ్యపుస్తక విభాగం; విషయనిపుణుల బృందం; కంప్యూటర్ ఆపరేటర్స్ మరియు ఇతర సాంకేతిక బృందానికి, ఈ అభ్యాస దీపిక రూపకల్పన మరియు అభివృద్ధిలో వారి ఎనలేని కృషికి ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి. తరపున మనఃపూర్వక కృతజ్ఞతలు.

ముఖ్య సలహాదారు

శ్రీమతి చిత్రా రామచంద్రన్, ఐఏఎస్
ప్రధాన కార్యదర్శి, విద్యాశాఖ,
తెలంగాణ.

గౌరవ సలహాదారు

శ్రీమతి ఎ. శ్రీదేవసేన, ఐఏఎస్
సంచాలకులు, పాఠశాల విద్య,
తెలంగాణ.

సలహాదారు

శ్రీమతి ఎం. రాధారెడ్డి
సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణాసంస్థ,
తెలంగాణ.

సమన్వయం

శ్రీమతి తహసీన్ సుల్తానా, ప్రొఫెసర్ & హెచ్.ఓ.డి.,
పాఠ్యప్రణాళిక మరియు పాఠ్యపుస్తక విభాగం, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి.,
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

సహకారం

శ్రీమతి ఐ. కరుణశ్రీ
పాఠ్యప్రణాళిక మరియు పాఠ్యపుస్తక విభాగం, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి.,
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

సబ్జెక్ట్ ఇన్ ఛార్జ్

శ్రీ టి. మనోహరాచారి, జి.హెచ్.ఎం.-II
ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి.,
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

రూపొందించిన వారు

శ్రీ టి. మనోహరాచారి, GHM-II, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ వి. శంకరయ్య, కన్సల్టెంట్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ పి.డి.ఎల్. గణపతి శర్మ, SA, ప్ర.ఉ.పా., మడ్ఫోర్ట్, హైదరాబాద్.

శ్రీ పి. సురేశ్, SA, ప్ర.ఉ.పా., విజయనగర్ కాలనీ, హైదరాబాద్.

శ్రీ కె. శ్రీధరాచార్యులు, SA, జి.ప.ఉ.పా., నార్సింగి, మెదక్.

శ్రీ ఆర్.ఎల్.ఎన్. మూర్తి, SA,, జి.ప.ఉ.పా., తూప్రాన్ పేట్, చౌటుప్పల్, యాదాద్రి భువనగిరి.

శ్రీ ధర్మేందర్ సింగ్, SA, జి.ప.ఉ.పా, మన్నూరు, ఆదిలాబాద్.

శ్రీ కందాల రామయ్య, SA, జి.ప.ఉ.పా., తాటికొండ, ఘన్ పూర్ స్టేషన్, జనగామ.

శ్రీ ఫసియూద్దీన్, SA, ప్ర.ఉ.పా., శషాబ్ గుట్ట, మహబూబ్ నగర్.

సహకార బృందం

శ్రీమతి జి. ఉష, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ, హైదరాబాదు.

శ్రీమతి ఆర్. వాసవి, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ, హైదరాబాదు.

శ్రీమతి వి. లతామాధవి, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ, హైదరాబాదు.

కవర్ పేజి డిజైన్

శ్రీ ఎం.డి. అయ్యూబ్ అహ్మద్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ, హైదరాబాదు.

లేఅవుట్ & డిజైన్

శ్రీ కన్నయ్య దార, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., తెలంగాణ, హైదరాబాదు.

విషయసూచిక

క్ర.సం.	అధ్యాయం పేరు	పేజి నెం.
01	వాస్తవ సంఖ్యలు	1
02	సమితులు	6
03	బహుపదులు	13
04	రెండుచరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత	17
05	వర్గ సమీకరణాలు	22
06	శ్రేణులు	27
07	నిరూపక రేఖాగణితం	30
08	సరూప త్రిభుజాలు	35
09	వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదనరేఖలు	41
10	క్షేత్రమితి	44
11	త్రికోణమితి	50
12	త్రికోణమితి అనువర్తనాలు	56
13	సంభావ్యత	61
14	సాంఖ్యిక శాస్త్రం	67

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

- గణితశాస్త్రంలో ఈ విద్యా సంవత్సరానికి పబ్లిక్ పరీక్షల మూల్యాంకనం కోసం నిర్దేశించబడిన 14 అధ్యాయాలపై దృష్టి పెట్టండి.
- ఈ అభ్యాస దీపికను 14 అధ్యాయాల నుండి తయారుచేయడం జరిగింది.
- అభ్యాస దీపికలో ఇచ్చిన కీలక భావనలపై విద్యార్థులచే అభ్యాసం చేయించాలి.
- అలాగే బహుశైచ్చిక ప్రశ్నలు, సమస్యలను విద్యార్థులతో అభ్యాసం చేయించాలి.
- బహుపదులు, రేఖీయ సమీకరణాలు, ఓజివ్ గ్రాఫ్‌లలోని నిర్మాణాలతో పాటు సరూప త్రిభుజాలు, వృత్తాలకు సర్వరేఖలు మరియు ఛేదన రేఖలు వంటి అధ్యాయాలలోని నిర్మాణాలను విద్యార్థులతో అభ్యాసం చేయించాలి. అన్ని అధ్యాయాలలోని సూత్రాలతో పాటు అందులో ఇమిడియున్న పదాలను వివరించాలి.
- అభ్యాస దీపికలో ఇచ్చిన అంశాలపై అనుమానం కలిగితే పాఠ్యపుస్తకం ఆధారంగా నివృత్తి చేయాలి.
- అభ్యాస దీపికను ఉపయోగించుకొని వార్షిక పరీక్షలో విద్యార్థులకు మంచి మార్కులు సాధించేటట్లు ప్రయత్నం చెయ్యాలి.

విద్యార్థులకు సూచనలు

- అభ్యాస దీపికను పూర్తిగా చదవాలి.
- పాఠం వారీగా ఇచ్చిన భావనలు - వివరణ బాగా చదివి అర్థం చేసుకోవడం ద్వారా ఎటువంటి సమస్య అడిగినా సులభంగా సాధన చేయవచ్చు.
- అభ్యాస దీపికలో ఇచ్చిన వాటిపై ఎలాంటి సందేహం వచ్చినా పాఠ్యపుస్తకం చూడండి. అలాగే మీ ఉపాధ్యాయులను అడగండి.
- వార్షిక పరీక్షలలో మంచి ఫలితాలు సాధించడానికి పాఠ్యపుస్తకంతో పాటు అభ్యాస దీపికను బాగా ప్రాక్టీస్ చేయండి.

వాస్తవ సంఖ్యలు

1. భాగహార న్యాయము:

ఇచ్చిన ఏవైనా రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు 'a' మరియు 'b'లకు అనుగుణంగా 'q' మరియు 'r' అనే రెండు పూర్ణాంకాలు వ్యవస్థితము మరియు $a = bq + r$ దీనిలో $0 \leq r < b$.

ఇక్కడ "a" ను విభాజ్యము అని, "b" ను విభాజకము అని, "q" ను భాగఫలము అని, "r" ను శేషము అని అంటాము.

$$\text{కావున, విభాజ్యము} = (\text{విభాజకము} \times \text{భాగఫలము}) + \text{శేషము.}$$

2. యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి:

ఇచ్చిన రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము (గ.సా.కా.)ను కనుగొనడానికి ఇది ఒక పద్ధతి.

ఇచ్చిన రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు c మరియు d ($c > d$) ల గ.సా.కా.ను కనుగొనడానికి ఈ క్రింది సోపానాలను అవలంబించారు.

సోపానం 1: c మరియు d లకు భాగహార న్యాయమును అనువర్తింపజేయగా, మనకు q మరియు r అనే పూర్ణాంకాలు వస్తాయి. ఇంకనూ $c = dq + r$, $0 \leq r < d$.

సోపానం 2: $r = 0$ అయిన d అనేది c మరియు d ల గ.సా.కా. అవుతుంది.

$r \neq 0$, అయిన మరలా d మరియు r లకు భాగహార న్యాయము అనువర్తింపజేయాలి.

సోపానం 3: శేషము 'సున్నా' వచ్చే వరకూ ఈ ప్రక్రియను కొనసాగించాలి.

శేషము 'సున్నా' వచ్చిన దశలోని విభాజకము మనకు కావలసిన గ.సా.కా. అవుతుంది.

3. ప్రాథమిక అంకగణిత సిద్ధాంతము / ఏకైక ప్రధాన కారణాంక సిద్ధాంతము:

ఇచ్చిన రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము (గ.సా.కా.)ను కనుగొనడానికి ఇది ఒక పద్ధతి.

ప్రతీ సంయుక్త సంఖ్య (ధనాత్మకం)ను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా ఏకైక విధానంలో రాయగలము. ఇలా రాయడంలో ప్రధాన సంఖ్యల క్రమానికి ప్రాధాన్యత లేదు.

$$\text{ఉదా: } 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

4. అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు:

i) $a = p/q$ దీనిలో p మరియు q లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు $q = 2^m \times 5^n$ (దీనిలో m మరియు n లు పూర్ణాంకాలు) అయిన ఆ అకరణీయ సంఖ్య ఒక అంతమయ్యే దశాంశము అవుతుంది.

$$\text{ఉదా: } \frac{7}{10} = \frac{7}{2 \times 5} = 0.7$$

ii) $a = p/q$, దీనిలో p మరియు q లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు 'q' ను $2^m \times 5^n$ (దీనిలో m మరియు n లు పూర్ణాంకాలు) రూపంలో రాయలేము. అయిన ఆ అకరణీయ సంఖ్య అంతముకాని ఆవర్తిత దశాంశము అవుతుంది.

$$\text{ఉదా: } \frac{7}{6} = \frac{7}{2 \times 3} = 1.6666\dots$$

5. రెండు సంఖ్యల క.సా.గు. మరియు గ.సా.కా. ల మధ్య సంబంధము

ఏవైనా రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు 'a' మరియు 'b' లకు

$$'a' \text{ మరియు } 'b' \text{ ల గ.సా.కా.} \times 'a' \text{ మరియు } 'b' \text{ ల క.సా.గు.} = a \times b$$

ఉదా: రెండు సంఖ్యలు 4 మరియు 6 అనుకొనుము.

$$\text{వాటి గ.సా.కా.} = 2 \text{ మరియు క.సా.గు.} = 12.$$

$$\text{గ.సా.కా.} \times \text{క.సా.గు.} = 2 \times 12 = 24$$

$$\text{సంఖ్యల లబ్ధము} = 4 \times 6 = 24$$

6. కరణీయ సంఖ్యల నిరూపణ

- i) \sqrt{a} ఒక కరణీయ సంఖ్య, 'a' ఖచ్చిత వర్గము కానవుడు.
- ii) $a \pm \sqrt{b}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య, 'b' ఖచ్చిత వర్గము కానవుడు.
- iii) $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య, 'a' మరియు 'b'లు ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యలు కానవుడు.
- iv) p ఒక ప్రధాన సంఖ్య,
p అనేది a^2 ను భాగిస్తుంది \implies p అనేది 'a'ను భాగిస్తుంది.

7. సంవర్గమానాలు:

$$a^x = N \quad \iff \quad \log_a N = x$$

(ఘాత రూపం) (సంవర్గమాన రూపం)

వీటిలో a మరియు N లు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$.

8. సంవర్గమాన ధర్మాలు:

- i) లబ్ధ నియమం
 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- ii) భాగఫల నియమం
 $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
- iii) ఘాత నియమం
 $\log_a x^m = m \log_a x.$
- iv) $\log_a 1 = 0$
- v) $\log_a a = 1$

Practice problems

1. భాగహార నియమాన్ని ఉపయోగించి, 25ను $25 = (4 \times q) + r$, రూపం రాసిన r విలువ []
 a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
2. $\frac{441}{2^2 \times 5^3 \times 7}$ సంఖ్యను దశాంశ రూపంలో విస్తరించి రాయగా []
 a) అంతమయ్యే దశాంశం
 b) అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం
 c) అంతంకాని, ఆవర్తితంకాని దశాంశం
 d) రెండు దశాంశ స్థానాల తరవాత అంతమగు
3. ఈ క్రింది వానిలో కరణీయ సంఖ్య కానిది []
 a) $(2-\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ c) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ d) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
4. 26 మరియు 91ల గ.సా.కా. []
 a) 15 b) 13 c) 19 d) 11
5. 1 నుండి 5 వరకు గల అన్ని సంఖ్యలచే భాగించబడే కనిష్ట సంఖ్య []
 a) 15 b) 80 c) 70 d) 60
6. $\log_5 125$ విలువను కనుగొనండి.
7. $\log_{\sqrt{2}} 64$ విలువను కనుగొనండి.
8. $\log_4 64$ ఒక అకరణీయ సంఖ్యా? లేక కరణీయ సంఖ్యా? మీ సమాధానాన్ని సహేతుకంగా వివరింపుము.
9. యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి ఉపయోగించి 36 మరియు 48ల గ.సా.కా.ను కనుగొనండి.
10. 80, 120ల క.సా.గు. మరియు గ.సా.కా.లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.
11. 90 మరియు 144ల గ.సా.కా. 18 అయిన, వాటి క.సా.గు.ను కనుగొనండి.
12. క్రింది వాటిని సంవర్గమాన రూపంలోకి మార్చి రాయండి.
 i) $3^y = 25$ ii) $\frac{1}{49} = 7^z$

13. ఈ క్రింది వాటిని ఘాత రూపంలో రాయండి.

i) $\log_3 27 = 3$ ii) $5 = \log_2 32$

14. ఈ క్రింది వాటిని విస్తరించి రాయండి.

i) $\log(200)$ ii) $\log\left(\frac{125}{64}\right)$

15. క్రింది వాటిని ఒకే సంవర్గమానంగా రాయండి.

i) $2 \log x + 3 \log y - 5 \log z$

ii) $5 \log 3 + 7 \log 2 - 3 \log 11 - 4 \log 5$

16. $5+3\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

17. $x^2 + y^2 = 27xy$ అయిన $2 \log(x-y) = 2 \log 5 + \log x + \log y$ అని నిరూపించండి.

18. 'm' ఒక పూర్ణాంకము అయిన, ఏదైనా ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య వర్గము $5m$ (లేదా) $5m+1$ (లేదా) $5m+4$ రూపంలో ఉంటుందని చూపండి.

19. 225 ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి.

20. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సమితులు

సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్ని సమితి అంటారు. సమితిలోని వస్తువులను సమితి మూలకాలు అంటారు.

సమితిలోని మూలకాలను $\{ \}$ బ్రాకెట్‌లో కామాలతో వేరు చేస్తూ రాస్తాం. సమితి పేర్లను ఆంగ్ల అక్షరమాలలోని పెద్ద అక్షరాలైన A, B, Cలచే సూచిస్తూ రాస్తాం.

ఉదా: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

“సమితి Nలో 1 ఉంటుంది” అనే ప్రవచనం గణిత గుర్తులనుపయోగించి $1 \in N$ మరియు “సమితి Nలో 0 ఉండదు” అనే ప్రవచనం గణిత గుర్తులనుపయోగించి $0 \notin N$ గా రాస్తాం. $x \in A$ ను “x belongs to A” మరియు $x \notin A$ ను “x does not belong to A” గా చదువుతాం.

ఒక సమితిలోని మూలకాలను కామాలతో వేరుచేస్తూ రాసిన, ఆ సమితి రూపాన్ని సమితి ‘జాబితా రూపం (roster form)’ అంటారు మరియు సమితి మూలకాల సాధారణ ధర్మాన్ని నిర్వచిస్తూ సమితిని రాసిన, ఆ సమితి రూపాన్ని సమితి ‘నిర్మాణ రూపం (set builder form)’ అంటారు.

ఉదా: $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ‘జాబితా రూపం (roster form) మరియు అదే సమితి $A = \{x: x \text{ అనేది } 16 \text{ కంటే తక్కువైన } 3 \text{ యొక్క గుణిజం}\}$ ను ‘సమితి నిర్మాణ రూపం (set builder form)’ లో ఉంది అంటాం.

కొన్ని సందర్భాలలో సమితి మూలకాల నిర్వచనానికి సరిపోయే మూలకాలు వ్యవస్థితం కావు. అలాంటప్పుడు, మూలకాలు లేని సమితిని ‘శూన్య సమితి’ అంటారు.

ఉదా: $A = \{x: x \text{ అనేది } 2 \text{ చే భాగించబడే బేసిసంఖ్య}\}$ సమితిలో మూలకాలు ఉండే అవకాశమే లేదు. కావున ఇది శూన్య సమితి. శూన్య సమితిని \emptyset చే సూచిస్తారు. $\emptyset = \{ \}$

ఒక సమితిలో అనంతంగా మూలకాలు ఉంటే, దానిని ‘అపరిమిత సమితి (infinite set)’ అంటారు మరియు ఒక సమితిలో పరిమిత సంఖ్యలో మూలకాలు ఉంటే, దానిని ‘పరిమిత సమితి (finite set)’ అంటారు.

ఉదా: $A = \{3, 6, 9, 12\}$ పరిమిత సమితి మరియు $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ అపరిమిత సమితి.

‘ఒక సమితి A లోని మూలకాలన్ని B సమితిలో ఉంటే’, సమితి A ను సమితి B యొక్క ‘ఉప సమితి’ అంటారు. దీనిని గణిత గుర్తులనుపయోగించి $A \subset B$ గా రాస్తాం.

ఉదా: $A = \{1,3,5\}$ మరియు $B = \{1,2,3,4,5\}$ అయితే ‘A is subset of B’ అవుతుంది. దీనిని $A \subset B$ గా రాస్తాం.

ఒక వ్యవస్థను విశ్లేషించడానికి తీసుకొనే సమితులను ఒక పెద్ద సమితి నుండి తీసుకోవలసి వస్తుంది. ఆ పెద్ద సమితిని మిగతా అన్ని సమితులకు ‘విశ్వ సమితి’ అంటారు. విశ్వ సమితిని U లేదా μ చే సూచిస్తాం. విశ్వ సమితికి ప్రతీ సమితి ఉపసమితి అవుతుంది.

రెండు సమితులలో ఒకే మూలకాలు ఉంటే, వాటిని ‘సమ సమితులు’ అంటారు.

ఉదా: $P = \{x: x \text{ అనేది } 12 \text{ యొక్క గుణిజం}\}$ మరియు $Q = \{x: x \text{ అనేది } 3 \text{ మరియు } 4 \text{ యొక్క గుణిజం}\}$, అయిన $P = \{12,24,36,48,\dots\}$ ఇంకా $Q = \{12,24,36,48,\dots\}$. కావున P మరియు Q లు సమ సమితులు.

సమితి ప్రక్రియలు

Union (\cup): $A \cup B$ సమితిని A లేదా B లేదా A మరియు B లలో ఉన్న మూలకాలన్నిటి సమితిగా రాస్తాం.

Intersection (\cap): $A \cap B$ సమితిని A మరియు B సమితులు రెండింటిలో ఉన్న మూలకాలన్నిటి సమితిగా రాస్తాం.

Difference ($-$): $A - B$ సమితిని ‘A లో మాత్రమే ఉండి B లో లేని’ మూలకాలన్నిటి సమితిగా రాస్తాం.

Practice problems

1. క్రింది వాటిలో ఏ సముదాయ సమితి అవుతుంది? []

- A అనే సముదాయంలో ఏవైనా 5 ప్రధాన సంఖ్యలున్నాయి.
- B అనే సముదాయంలో ఏవైనా మొదటి 5 ప్రధాన సంఖ్యలున్నాయి.
- C అనే సముదాయంలో భారతదేశంలోని తెలివైన వారున్నారు.

a) B b) C c) A d) ఏదీకాదు

2. ఈ క్రింది వాటిలో ఏది $A = \{2,4,6,8,10\}$ యొక్క నిర్మాణ రూపం కాదు? []

- a) $A = \{x: x \text{ అనేది సరిసంఖ్య}\}$
- b) $A = \{x: x = 2n, n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$
- c) $A = \{x: x \in \text{మొదటి } 5 \text{ సరిసంఖ్యల సముదాయం}\}$
- d) $A = \{x: x \text{ అనేది సరిసంఖ్య, } x \leq 5\}$

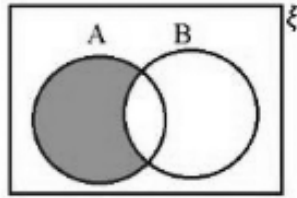
10. $A = \{x: x \text{ అనేది } 2 \text{ యొక్క గుణిజం}\}$ అయిన, ఈ క్రింది వాటిలో ఏది సమితి A యొక్క ఉపసమితి కాదు? []

- a) $\{x: x \text{ అనేది } 4 \text{ యొక్క గుణిజం, } x < 40\}$ b) $\{x: x \text{ అనేది } 6 \text{ యొక్క గుణిజం, } x < 60\}$
 c) $\{x: x \text{ అనేది } 8 \text{ యొక్క గుణిజం, } x < 80\}$ d) $\{x: x \text{ అనేది } 9 \text{ యొక్క గుణిజం, } x < 90\}$

11. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి సమ సమితులు కావు? []

- a) $\{x: x \text{ అనేది MADAM పదంలోని అక్షరం}\}$ మరియు $\{x: x \text{ అనేది DAM పదంలోని అక్షరం}\}$
 b) $\{x: x \text{ అనేది సరిసంఖ్య}\}$ మరియు $\{x: x \text{ అనేది } 2 \text{ చే నిశ్చేషంగా భాగించబడే సంఖ్య}\}$
 c) $\{x: x \text{ అనేది వర్గసంఖ్య}\}$ మరియు $\{x: x \text{ అనేది మొదటి 'n' బేసిసంఖ్యల మొత్తం, } n \in \mathbb{N}\}$
 d) $\{x: x \text{ అనేది ప్రధాన సంఖ్య, } x < 8\}$ మరియు $\{x: x \text{ అనేది బేసిసంఖ్య, } x < 8\}$

12. ఈ వెన్ చిత్రంలో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం దేనిని సూచిస్తుంది? []



- a) $A - B$ b) $B - A$ c) $A \cup B$ d) $A \cap B$

13. $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ మరియు $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ అయిన $A \cup B$ []

- a) $\{3, 5, 7\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$
 c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ d) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$

14. $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ మరియు $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ అయిన $A \cap B$ []

- a) $\{3, 5, 7\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$
 c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ d) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$

15. $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ మరియు $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ అయిన $A - B$ []

- a) $\{3, 5, 7\}$ b) $\{2, 11\}$ c) $\{1, 7, 9\}$ d) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$

Very Short Answer Questions (2 Marks)

1. (i) $A = \{x: x \text{ అనేది } 5 \text{ యొక్క గుణిజం, } x < 30\}$, (ii) $B = \{x: x = n^2 + 1, n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$ సమితుల జాబితా రాయండి.

2. (i) $P = \{1,2,3,4,6,12\}$, (ii) $Q = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\}$ సమితుల నిర్మాణ రూపాలను రాయండి.
3. శూన్య సమితికి ఏవైనా రెండు నిర్మాణ రూపాలను రాయండి.
4. శూన్య సమితిని రామ $\{ \emptyset \}$ లాగ మరియు శ్రీధర్ $\{ 0 \}$ లాగ రాశారు. ఎవరు సరిగా రాశారు? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
5. $K = \{1,3,5,7\}$ యొక్క అన్ని ఉపసమితులను రాయండి.
6. $A = \{1,2,3,4,5\}$ మరియు $B = \{1,3,5,7,9\}$ అయిన, ఈ సమితులను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపుము.
7. $A = \{2,4,6,8,10\}$ మరియు $B = \{1,3,5,7,9\}$ అయిన, ఈ సమితులను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపుము.
8. $A = \{1,2,3,4,5,7,9\}$ మరియు $B = \{1,3,5,7,9\}$ అయిన, ఈ సమితులను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపుము.
9. A మరియు B లు ఏవైనా ఒకదానికి మరొకటి ఉపసమితులు కాని, వియుక్త సమితులు కాని శూన్యేతర సమితులు. $A \cup B$ ని ప్రాతినిధ్యపరిచే వెన్ చిత్రాన్ని షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం ద్వారా చూపుము.
10. A మరియు B లు ఏవైనా ఒకదానికి మరొకటి ఉపసమితులు కాని, వియుక్త సమితులు కాని శూన్యేతర సమితులు. $A \cap B$ ని ప్రాతినిధ్యపరిచే వెన్ చిత్రాన్ని షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం ద్వారా చూపుము.
11. A మరియు B లు ఏవైనా ఒకదానికి మరొకటి ఉపసమితులు కాని, వియుక్త సమితులు కాని శూన్యేతర సమితులు. $A - B$ ని ప్రాతినిధ్యపరిచే వెన్ చిత్రాన్ని షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం ద్వారా చూపుము.
12. $D = \{x: x \text{ అనేది } 10 \text{ కంటే చిన్నదైన ప్రధాన సంఖ్య}\}$ మరియు $S = \{x: x \text{ అనేది ప్రధాన సంఖ్య, } 1 < x < 9\}$, అయితే D మరియు S లు సమ సమితులు అవుతాయా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
13. $A = \{2,4,8,16,32\}$ మరియు $B = \{0,2,4,6,8\}$ అయిన $A \cup B$ ను కనుగొనుము.
14. $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ మరియు $B = \{a,e,i,o,u\}$ అయిన $A \cap B$ ను కనుగొనుము.
15. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ మరియు $B = \{1,3,5,7,9\}$ అయిన $A - B$ ను కనుగొనుము.
16. A మరియు B శూన్యేతర సమితులు మరియు $A \subset B$ అయిన, $A \cup B = B$ అవుతుందా? ఎలా చెప్పగలరు?
17. A మరియు B శూన్యేతర సమితులు మరియు $A \subset B$ అయిన, $A \cap B = A$ అవుతుందా? ఎలా చెప్పగలరు?
18. A మరియు B శూన్యేతర సమితులు మరియు $A \subset B$ అయిన, $A - B$ ఏ సమితి అవుతుంది? ఎలా చెప్పగలరు?
19. $\emptyset \cup A = A$ అవుతుందా? ఎలా చెప్పగలరు?
20. $\emptyset \cap A = \emptyset$ అవుతుందా? ఎలా చెప్పగలరు?

Short Answer Questions (4 Marks)

1. $A = \{x : x \text{ అనేది } 15 \text{ కంటే తక్కువ అయిన } 3 \text{ యొక్క గుణిజం}\}$ మరియు $B = \{x : x \text{ అనేది } 12 \text{ యొక్క కారణాంకం}\}$ అయిన, A మరియు B సమితులను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపుము.
2. $A = \{x : x \text{ అనేది } 24 \text{ యొక్క కారణాంకం}\}$ మరియు $B = \{x : x \text{ అనేది } 120 \text{ యొక్క కారణాంకం}\}$ అయిన, A మరియు B సమితులను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపుము.
3. $A = \{x : x \text{ అనేది } 20 \text{ కంటే చిన్నదైన ప్రధాన సంఖ్య}\}$ మరియు $B = \{x : x \text{ అనేది } 4 \text{ యొక్క గుణిజం}\}$. A మరియు B సమితులను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపుము.
4. $A = \{x : x \text{ అనేది ఎదుటి భుజాలు సమానంగా గల చతుర్భుజాల పేరు}\}$ మరియు $B = \{x : x \text{ అనేది కర్ణాలు సమానంగా గల చతుర్భుజాల పేరు}\}$. ఈ సమాచారాన్ని చూపే సమితులను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపుము.
5. $P = \{x : x \text{ అనేది } 7 \text{ కంటే చిన్నదైన ప్రధాన సంఖ్య}\}$ మరియు $Q = \{x : x \text{ అనేది } 30 \text{ యొక్క ప్రధాన కారణాంకం}\}$. P మరియు Q ల సమానత్వాన్ని పరీక్షించండి.
6. $A = \{x : x \text{ అనేది } 4 \text{ యొక్క గుణిజం మరియు } x \leq 20\}$ మరియు $B = \{x : x = 2^n, n < 5, n \in W\}$ అయిన, $A \cup B$, $A \cap B$ మరియు $A - B$ లను కనుక్కోండి.
7. $A = \{x : x \text{ అనేది } 36 \text{ యొక్క కారణాంకం}\}$ మరియు $B = \{x : x = n^2, -5 \leq n \leq 5, n \in Z\}$ అయిన, $A \cup B$, $A \cap B$ మరియు $A - B$ లను కనుక్కోండి.
8. $A = \{x : x = 6n, x \leq 30 \text{ మరియు } n \in Z\}$ మరియు $B = \{x : x = n(n+1), n < 6, n \in W\}$ అయిన, $A \cup B$, $A \cap B$ మరియు $A - B$ లను కనుక్కోండి.
9. $A \subset B$ అయ్యేటట్లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర సమితులు A మరియు B లను రాయండి. వాటితో $A \cup B = B$ సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.
10. $A \subset B$ అయ్యేటట్లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర సమితులు A మరియు B లను రాయండి. వాటితో $A \cap B = A$ సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.
11. $A \subset B$ అయ్యేటట్లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర సమితులు A మరియు B లను రాయండి. వాటితో $A - B = \emptyset$ సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.
12. A మరియు B లు శూన్యేతర వియుక్త సమితులు అయ్యేటట్లు రెండు సమితులు వ్రాసి, వాటి ద్వారా $A - B = A$ సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.
13. A మరియు B లు శూన్యేతర వియుక్త సమితులు అయ్యేటట్లు రెండు సమితులు వ్రాసి, వాటి ద్వారా $B - A = B$ సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.

14. A మరియు B లు శూన్యేతర వియుక్త సమితులు అయ్యేటట్లు రెండు సమితులు వ్రాసి, వాటి ద్వారా $n(A \cap B)=0$ సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.
15. A మరియు B లు శూన్యేతర వియుక్త సమితులు అయ్యేటట్లు రెండు సమితులు వ్రాసి, వాటి ద్వారా $n(A \cup B)=n(A)+n(B)$ సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.

Essay Type Questions (8 Marks)

1. $A=\{x:x \text{ అనేది } 12 \text{ యొక్క కారణాంకం}\}$ మరియు $B=\{x: x \text{ అనేది } 30 \text{ యొక్క కారణాంకం}\}$ అయిన, $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ మరియు $n(A \cup B)$ ల మధ్య సంబంధాన్ని పరీక్షించండి.
2. $A=\{x:x \text{ అనేది } 4 \text{ యొక్క గుణిజం, } x \leq 50\}$ మరియు $B=\{x:x=6n, n < 10, n \in \mathbb{Z}\}$ అయిన, $n(A-B)=n(A)-n(A \cap B)$ అని చూపండి.
3. $A=\{x:x=n^2, -3 < n < 5, n \in \mathbb{W}\}$ మరియు $B=\{x:x=3n+1, -3 \leq n \leq 2, n \leq 30 \text{ మరియు } n \in \mathbb{Z}\}$ అయిన, $n(B-A)=n(B)-n(A \cap B)$ అని చూపండి.
4. $A=\{x:x = \log n, n=10^m, m < 6, m \in \mathbb{N}\}$ మరియు $B=\{x: -5 < x < 5, n \in \mathbb{Z}\}$ అయిన, A మరియు B లు వెన్ చిత్రం ద్వారా $A \cap B, A-B, B-A$ లను రాయండి.
5. $P=\{x: x \text{ అనేది సంయుక్త సంఖ్య, } x \leq 15\}$ మరియు $Q=\{x:x=3n, n < 10, n \in \mathbb{Z}\}$ అయిన, P మరియు Q లను వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపి $P \cap Q, P-Q, Q-P$ లను రాయండి.

బహుపదులు

1. **బహుపది:** ఒక బీజీయ సమాసంలో చరరాశి ఘాతాంకాలు పూర్ణాంకాలు అయితే దానిని ఒక బహుపది అంటారు. ఒక బహుపదిలో \sqrt{x} , x^{-2} , $\frac{1}{x}$, $x^{3/4}$ మొదలైన పదాలు ఉండవు.

2. **బహుపది విలువ (చరరాశి యొక్క ఒక ప్రత్యేక విలువ వద్ద):**

$P(x) = x^2 + 2x + 3$ బహుపది విలువను $x=1$ వద్ద కనుగొనడానికి, ఆ బహుపదిలో x స్థానంలో '1'ని ప్రతిక్షేపించాలి. $x = 1$

$$P(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$P(1) = (1)^2 + 2(1) + 3$$

$$= 1 + 2 + 3 = 6$$

కావున $x=1$ వద్ద $P(x)$ బహుపది విలువ 6 అనగా $P(1) = 6$

3. **బహుపది పరిమాణము:**

ఇచ్చిన బహుపదిలోని అన్ని పదాలలోని చరరాశుల పరిమాణాలలోని గరిష్ట విలువ ఆ బహుపది పరిమాణము అవుతుంది.

ఉదా: $P(x) = x^2 + 2x + 4x^3 - 5$

	↓	↓	↓	↓
ప్రతి పదము పరిమాణము	2	1	3	0

$P(x)$ బహుపది పరిమాణము = 3

(∴ ఆ బహుపదిలోని అన్ని పదాల పరిమాణాలలో గరిష్ట విలువ కావున)

4. **బహుపది శూన్య విలువ:**

$P(x)$ అనే బహుపది ఇచ్చినప్పుడు, $P(k) = 0$ అయిన 'k' ను ఆ బహుపది $P(x)$ కు శూన్యము అంటారు.

ఉదా: $P(x) = x^2 - 2x + 1$

$$P(1) = (1)^2 - 2(1) + 1$$

$$= 1 - 2 + 1$$

$$= 0$$

కావున, $P(x)$ బహుపది శూన్యము 1.

5. బహుపది శూన్యాలను మరియు గుణకాలకు మధ్య సంబంధము:

i) $P(x) = ax^2 + bx + c$, ఒక వర్గ బహుపది. దీని శూన్యాలు α , β అనుకొనుము.

$$\text{శూన్యాల మొత్తం } \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\text{శూన్యాల లబ్ధము } \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

ii) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ఒక ఘన బహుపది. దీని శూన్యాలు α , β , γ

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

6. ఒక వర్గ బహుపది $P(x)$ కు α మరియు β లు శూన్యాలైన

$$P(x) = x^2 - x(\alpha + \beta) + \alpha\beta$$

దీనినే మనం

$$P(x) = x^2 - x(\text{శూన్యాల మొత్తం}) + (\text{శూన్యాల లబ్ధం}) \text{ గా వ్రాస్తాము.}$$

7. వర్గ బహుపది రేఖాచిత్రము ఒక పరావలయము.

i) ఈ రేఖాచిత్రము X -అక్షాన్ని రెండు బిందువులు అనగా $(x_1, 0)$ మరియు $(x_2, 0)$ ల వద్ద తాకిన x_1, x_2 లు ఆ బహుపది $P(x)$ కు శూన్యాలు. ఇంకనూ ఆ రెండు శూన్యాలు వాస్తవాలు మరియు విభిన్నాలు.

ii) ఈ రేఖాచిత్రము X -అక్షాన్ని ఒకే బిందువు అనగా $(x_1, 0)$ అయిన x_1, x_1 లు ఆ బహుపదికి శూన్యాలు. అనగా ఆ రెండు శూన్యాలు వాస్తవాలు మరియు సమానాలు.

iii) రేఖాచిత్రము X -అక్షాన్ని ఖండించనిచో, ఆ బహుపది శూన్యాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు అని అని మనకు తెలుస్తుంది.

Practice problems

1. $P(x) = 2x^3 - 3kx^2 + 4x - 5$ బహుపది శూన్యాల మొత్తం 6, అయిన 'k' విలువ []
 a) 2 b) 4 c) -2 d) -4
2. ఈ క్రింది సమాసాలలో, బహుపది కానిది []
 a) $\sqrt{3x^2} - 2\sqrt{3x} + 3$ b) $\frac{3}{2}x^3 - 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1$
 c) $x + \frac{1}{x}$ d) $5x^2 - 3x + \sqrt{2}$
3. $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 8$, అయిన $P(-1)$ విలువ []
 a) 2 b) 15 c) 17 d) -17
4. $P(x) = x^3 - 2x^2 - \sqrt{3}x + \frac{1}{2}$ బహుపది పరిమాణము []
 a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) 3 d) 4
5. ఒక వర్గ బహుపది శూన్యాల మొత్తం మరియు శూన్యాల లబ్ధములు వరుసగా '2' మరియు '-15' అయిన వర్గ బహుపది []
 a) $x^2 - 2x + 15$ b) $x^2 - 2x - 15$ c) $x^2 + 2x - 15$ d) $x^2 + 2x + 15$
6. $2x^2 - 8x - k$ వర్గ బహుపది యొక్క ఒక శూన్యము $\frac{5}{2}$ అయిన 'k' విలువ []
 a) $\frac{15}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{45}{2}$ d) $\frac{-15}{2}$
7. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 7$ బహుపదిలో x^2 పదము గుణకము []
 a) 2 b) -5 c) -3 d) 7
8. $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$ వర్గ బహుపది శూన్యాలను కనుగొనుము.
9. $P(x) = x^2 + 7x + 12$ వర్గ బహుపది శూన్యాలను కనుగొని, శూన్యాలకు మరియు గుణకాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.
10. $P(x) = x^2 - 5x + 6$ అయిన $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ ల విలువలను కనుగొనండి.
11. ఇచ్చిన సంఖ్యలు వరుసగా శూన్యాల మొత్తము మరియు శూన్యాల లబ్ధము అయిన, ఆ వర్గ బహుపదులను రాయండి.
 i) $\frac{1}{4}, -1$ ii) $0, \sqrt{5}$

12. ఇచ్చిన సంఖ్యలను శూన్యాలుగా కలిగిన వర్గ బహుపదులను రాయండి.

i) 2, 3

ii) $\frac{1}{4}, 1$

13. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ఘన బహుపదికి 3, -1 మరియు $-\frac{1}{3}$ లు శూన్యాలు అవుతాయో కావో సరిచూడండి.

14. $P(x) = 6x^2 - 13x + 6$ బహుపదికి చెందిన క్రింది పట్టికను సరియైన విలువలతో నింపండి.

x	-2	-1	0	1	2
x^2					
$6x^2$					
$-13x$					
6					
y					

15. ఈ క్రింది బహుపదులకు రేఖాచిత్రములు గీసి, ఆ రేఖాచిత్రముల నుండి ఆ బహుపదుల శూన్యాలను కనుగొనండి.

i) $x^2 + 4x + 4$

ii) $2x^2 - 6x + 4$

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత

1. $ax + by + c = 0$ రూపంలో ఉండి a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలవుతూ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. a లేదా b లు సున్నా కానటువంటి సమీకరణాన్ని రెండు చరరాశులలో x మరియు y లలో రేఖీయ సమీకరణం అంటారు.
2. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ($a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ మరియు $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$) రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణాల జత.
3. రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి పద్ధతులు

i. బీజగణిత పద్ధతి

ఎ) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

బి) చరరాశి తొలగించే పద్ధతి

ii. రేఖాచిత్రం (గ్రాఫ్) పద్ధతి

ఎ) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి:

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనుటలో ఒక చరరాశిని రెండవ చరరాశి పదములలో సులభంగా రాయగలిగినపుడు ఈ పద్ధతి చాలా ఉపయోగకరము.

సమీకరణాల జత

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots\dots\dots (2) \quad \text{అయిన}$$

సోపానము-1 : ఒక సమీకరణంలో ఒక చరరాశిని వేరొక చరరాశి పదములలో రాయుము. (ఉదా: చరరాశి 'y' ని చరరాశి 'x' పదములలో రాయాలి).

సోపానము-2 : సోపానము 1లో వచ్చిన చరరాశి y విలువను రెండవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించాలి.

సోపానము-3 : సోపానము 2లో వచ్చిన సమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించి x విలువ కనుగొనాలి.

సోపానము-4 : సోపానము 3లో వచ్చిన x విలువను సోపానము 1 సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి దానిని చరరాశి y కొరకు సాధించాలి.

సోపానము-5 : వచ్చిన సాధనలోని x, y విలువలను ఇచ్చిన రెండవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి సరిచూడాలి.

బి) చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి:

సోపానము-1: ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలను $ax + by = c$ రూపంలో రాయండి.

సోపానము-2: ఆ రెండు సమీకరణాలను సరియైన వాస్తవ సంఖ్యలతో గుణించడం ద్వారా ఆ రెండు సమీకరణాలలోని రెండు చరరాశులలో తొలగించదలచిన ఒక చరరాశి గుణకాన్ని సమానం చేయండి.

సోపానము-3: మనం తొలగించవలసిన చరరాశి గుణకాలు రెండు సమీకరణాలలో ఒకే గుర్తును కలిగి వుంటే ఒక సమీకరణం నుండి వేరొకటి తీసివేయడం ద్వారా ఒక చరరాశిలో ఒక సమీకరణం వస్తుంది. అదే వాటికి వ్యతిరేక గుర్తులుంటే వాటిని కూడాలి.

సోపానము-4: మిగిలిన చరరాశి విలువ కొరకు ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సోపానము-5: ఈ వచ్చిన విలువను ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలలో ఒకదానిలో ప్రతిక్షేపించి, మనం ముందు తొలగించిన చరరాశి విలువ కనుగొనాలి.

ii. గ్రాఫ్ పద్ధతి/ రేఖాచిత్ర పద్ధతి

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాన్ని రేఖాచిత్ర పద్ధతిలో సాధించడానికి మనకు కనీసం ఆ సమీకరణానికి మూడు సాధనలు కావాలి. దాని కొరకు ఇచ్చిన సమీకరణంలో y ను x పదాలలో వ్యక్తపరచాలి. తరువాత మనకు అనుకూలంగా ఉండే ఏవైనా మూడు విలువలను x కు తీసుకొని వాటికి అనుగుణంగా వచ్చే y విలువలను కనుగొనాలి. తరువాత ఈ మూడు బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితంపై గుర్తించి ఆ బిందువుల గుండా పోయేటట్లు స్ట్రేలు సహాయంతో ఒక సరళరేఖను గీయాలి. ఇలా గీసిన సరళరేఖ ఆ రేఖీయ సమీకరణం రేఖాచిత్రాన్ని సూచిస్తుంది.

గమనిక: రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతను సూచించడానికి రెండు సరళరేఖలను గీస్తాము.

4. రేఖీయ సమీకరణాల సాధనల స్వభావం

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ రెండు రేఖీయ సమీకరణాల జత అయిన వాటి స్వభావం

సందర్భం 1: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగత సమీకరణాలు

సందర్భం 2: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత అసంగత సమీకరణాలు

సందర్భం 3: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగత సమీకరణాలు మరియు

పరస్పరాధారిత సమీకరణాలు

క్ర.సం.	నియమం	సూచించే గ్రాఫ్	బీజగణిత వివరణ
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ఖండనరేఖలు	ఏకైక సాధన
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	సమాంతర రేఖలు	సాధన లేదు
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ఏకీభవించే రేఖలు	అనంతమైన సాధనలుండును

Practice problems

- క్రింది వాటిలో రేఖీయ సమీకరణం కానిది []
A) $x + 2y = 5$ B) $x - y = 5$
B) $x^2 + 2y = 5$ D) $2x + y = 5$
- $x = 2$, $x + y = 5$ అయిన, y విలువ []
A) 3 B) 4 C) 1 D) 0
- $x + y = a$ యొక్క సాధన $x = \log_2 8$ మరియు $y = \log_7 49$ అయిన 'a' విలువ []
A) 3 B) 2 C) 4 D) 5
- $3x - y + 8 = 0$ మరియు $6x - ky + 16 = 0$ సమీకరణాలు ఏకీభవించే రేఖలు అయితే 'k' విలువ? []
A) $1/2$ B) $-1/2$ C) 2 D) -2
- $3x + 2ky = 2$ మరియు $2x + 5y + 1 = 0$ అనునది సమాంతర రేఖలు అయిన 'k' విలువ []
A) $-5/4$ B) $2/5$ C) $15/4$ D) $3/2$

6. పరస్పర ఆధారిత సమీకరణాలలో ఒక సమీకరణం $-5x + 7y - 2 = 0$ అయిన రెండవ సమీకరణం. []

A) $10x + 14y + 4 = 0$

B) $-10x - 14y + 4 = 0$

C) $-10x + 14y + 4 = 0$

D) $10x - 14y = -4$

7. ఈ క్రింది వాటిలో $3x - 2y + 7 = 0$ కు సమాంతరంగా ఉండే రేఖీయ సమీకరణం []

a) $6x - 4y + 8 = 0$

b) $6x - 4y + 14 = 0$

c) $9x - 6y + 21 = 0$

d) $2x + 3y + 7 = 0$

8. క్రింది రేఖీయ సమీకరణాలను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

i) $3x - 5y = -1$

ii) $x + 2y = -1$

$x - y = -1$

$2x - 3y = 12$

iii) $x + y = 9$

iv) $2x + 3y = 9$

$x - y = 5$

$3x + 4y = 5$

9. క్రింది రేఖీయ సమీకరణాల జతను చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

i) $8x + 5y = 9$

ii) $11x - 5y + 61 = 0$

$3x + 2y = 4$

$3x - 20y - 2 = 0$

iii) $3x + 2y = 14$

iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$

$-x + 4y = 7$

$x - \frac{y}{3} = 3$

10. క్రింది సమీకరణాలను గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సాధించుము.

i) $x - y + 1 = 0$

ii) $x - 5y = 6$

$3x + 2y - 12 = 0$

$2x - 10y = 12$

iii) $3x + y - 5 = 0$

iv) $2x + 3y = 9$

$2x - y - 5 = 0$

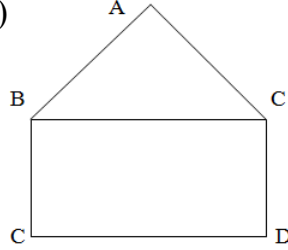
$-10x + 6y = -22$

11. ఒక విద్యార్థి $2x + 3y = 9$ మరియు $4x + 6y = 18$ సమీకరణాలు సంగత సమీకరణాలు అని అన్నాడు. దీనిని మీరు సమర్థిస్తారా? జవాబు సరిపోల్చండి.

12. రేఖీయ సమీకరణాలు $3x + 2y = 8$ మరియు $6x - 4y = 9$ సమాంతర రేఖలా లేక ఖండన రేఖలా సరిచూడండి.

13. $kx + 3y = 1$ మరియు $12x + ky = 2$ సమీకరణాలకు సాధన లేనట్లయితే 'k' విలువ ఎంత?

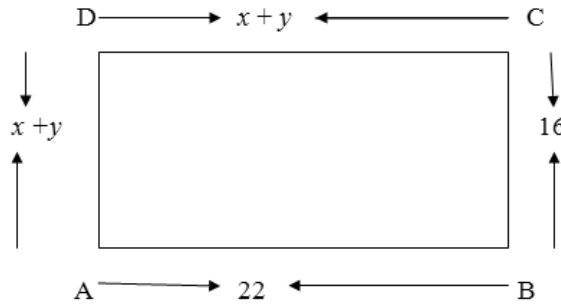
14. ABCDE ఒక పంచభుజిలో $BE \parallel CD$ మరియు $BC \parallel DE$, $BC \perp CD$, $AB = 5\text{cm}$, $AE = 5\text{cm}$, $BE = 7\text{cm}$, $BC = x - y$ మరియు $CD = x + y$. పంచభుజి ABCDE చుట్టుకొలత 27cm అయిన, x, y విలువలు కనుగొనుము ($x, y \neq 0$)



15. తండ్రి కుమారుల వయస్సుల మొత్తం 48 సంవత్సరాలు. తండ్రి వయస్సు కుమారుని వయస్సుకు 3 రెట్లు అయిన వారి వయస్సులు కనుగొనుము.

16. ఒక రెండంకెల సంఖ్యకు 7 రెట్లు, దత్త సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారుగా చేయగా వచ్చిన సంఖ్యకు 4 రెట్లు సమానం. ఆ సంఖ్యలోని అంకెల భేదం 3 అయిన, ఆ సంఖ్య ఏది?

17. క్రింద ఇవ్వబడిన దీర్ఘచతురస్రం ABCD లో x మరియు y విలువలు కనుగొనుము.



18. ఒక భిన్నము యొక్క లవము నుండి 2 తీసివేసి, హారమునకు 1 కలుపగా వచ్చే భిన్నము $\frac{1}{2}$. అలాగే లవమునకు 4 కలిపి, హారము నుండి 3 తీసివేసిన ఆ భిన్నము $\frac{3}{2}$ అయిన, ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.

19. ఒక భిన్నము లవహారములకు 2 కలుపగా అది $\frac{9}{11}$ అగును. అదే లవహారములకు 3 కలిపిన ఆ భిన్నము $\frac{5}{6}$ అవుతుంది. అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.

20. 4 కుర్చీలు మరియు 3 బల్లలు వెల రూ. 2100/- మరియు అదే రకపు 5 కుర్చీలు మరియు 2 బల్లల వెల రూ. 1750/- అయిన, ఒక (1) కుర్చీ మరియు ఒక (1) బల్ల ధరలను కనుగొనండి.

21. రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి $2 : 3$. ఆ సంఖ్యలకు 5 కలుపగా వచ్చే సంఖ్యల నిష్పత్తి $5 : 7$ అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

22. రెండు సంపూర్ణక కోణాలలో పెద్ద కోణం చిన్న కోణం కన్నా 18° ఎక్కువ అయిన, ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

వర్గ సమీకరణాలు

1. $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) అనేది ఒక వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపము.

గమనిక: దీనిలో 'a' అనేది x^2 యొక్క గుణకము, 'b' అనేది x యొక్క గుణకము మరియు 'c' అనేది స్థిరపదము.

2. $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) వర్గ సమీకరణ మూలాలు లేదా సాధనలు α , β అయిన $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ మరియు $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ అవుతుంది.

గమనిక: సాధారణంగా వర్గ సమీకరణ మూలాలను గ్రీకు అక్షరాలైన α మరియు β (α - ఆల్ఫా మరియు β - బీటా) లతో సూచిస్తాము.

3. α మరియు β మూలాలతో ఏర్పడే వర్గ సమీకరణం $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

4. $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) వర్గ సమీకరణ మూలాలు α మరియు β అయిన

i) మూలాల మొత్తం $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

ii) మూలాల లబ్ధం $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$

5. ఒక వర్గ సమీకరణ సాధనా పద్ధతులు

i) కారణాంక పద్ధతి

ii) వర్గ సమీకరణ సూత్ర పద్ధతి

i) కారణాంక పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో ఒక వర్గ బహుపదిని, మధ్యపదాన్ని విడగొట్టడం లేదా వివిధ సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించడం ద్వారా రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి దానిని సున్నాకు సమానం చేస్తాం.

గమనిక: $(x - \alpha) (x - \beta) = 0$

$$\begin{array}{l|l} (x - \alpha) = 0 & (x - \beta) = 0 \\ x = \alpha & x = \beta \end{array}$$

$x = \alpha$ మరియు $x = \beta$ లు వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధనలు.

ii) వర్గ సమీకరణ సూత్ర పద్ధతి

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \text{ వర్గ సమీకరణ సాధనలు } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{దీనిలో} \quad \alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. మూలాల స్వభావం

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) వర్గ సమీకరణమునకు $b^2 - 4ac$ ని విచక్షణి అంటారు. దీనిని 'D' తో సూచిస్తారు.

$$D = b^2 - 4ac$$

గమనిక: ఒక వర్గ సమీకరణ మూలాల స్వభావం ఈ విచక్షణి విలువపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

క్ర.సం.	$D = b^2 - 4ac$	మూలాల స్వభావం
1	$D > 0$	మూలాలు వాస్తవాలు మరియు విభిన్నాలు
2	$D = 0$	మూలాలు వాస్తవాలు మరియు సమానాలు
3	$D < 0$	వాస్తవ మూలాలు లేవు (కల్పిత సంఖ్యలు)

Practice problems

1. $3x^2 - 7 = 0$ వర్గ సమీకరణ మూలాల మొత్తం []

- a) 0 b) $\frac{7}{3}$ c) $-\frac{7}{3}$ d) $\frac{3}{7}$

2. $x^2+x+1=0$ వర్గ సమీకరణ మూలాల లబ్ధం []
a) -1 b) 1 c) 0 d) 3
3. $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) వర్గ సమీకరణ మూలాలు α, β అయిన $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$ []
a) $\frac{-b}{a}$ b) $\frac{c}{a}$ c) $\frac{-a}{c}$ d) $\frac{-b}{c}$
4. $px^2+qx+r=0$ ($p \neq 0$) వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\sin \alpha, \cos \alpha$ అయిన, p, q, r ల మధ్య సంబంధం []
a) $q^2 - p^2 = 2pr$ b) $p^2 - q^2 = 2pr$ c) $p^2 - r^2 = 2qr$ d) $p^2 + q^2 = 2qr$
5. $3x^2+(k-1)x+9=0$ వర్గ సమీకరణానికి 3 ఒక మూలం అయిన, $k =$ []
a) 11 b) -11 c) 13 d) -13
6. $x^2-2x+1=0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు []
a) 1, 1 b) 1, 7 c) -1, 7 d) -1, -7
7. $3(x+3)^2=48$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు []
a) 1, -7 b) 1, 7 c) -1, 7 d) -1, -7
8. $x^2+7x=0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు []
a) 0, -7 b) 0, 7 c) 7, -7 d) -7, -7
9. $3 + \sqrt{5}$ ఒక మూలంగా కలిగిన వర్గ సమీకరణం []
a) $x^2-6x+4=0$ b) $x^2-6x-4=0$
c) $x^2+6x+4=0$ d) $x^2+6x+5=0$
10. $kx^2+2x+3=0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు సమానం అయిన, $k =$ []
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{-1}{3}$ c) 3 d) -3
11. $x^2-4x+a=0$ వర్గ సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు లేవు, అయిన []
a) $a < 4$ b) $a \leq 4$ c) $a < 2$ d) $a > 4$

12. $x^2-bx+c=0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు రెండు వరుస పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన []

- a) $b^2-4c=0$ b) $b^2-4c=1$ c) $b^2-4c=2$ d) $b^2+4c=1$

13. ఈ క్రింది సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవుతాయో, కావో సరిచూడండి.

a) $x(2x+3) = x+2$

b) $y(8y+5) = y^2+3$

c) $(x-2)^2+1 = 2x-3$

d) $x(x+1) = 6$

14. “రెండు వరుస ధన బేసి పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధము 63.” ఈ సమాచారానికి తగిన వర్గ సమీకరణంను రాయండి.

15. “ $(2x-1)(x-3) = (2x+5)(x-1)$ ఒక వర్గ సమీకరణమని లక్ష్మి చెప్పింది. నీవు ఆమెతో ఏకీభవిస్తావా? మీ సమాధానాన్ని సహేతుకంగా వివరించండి.

16. “ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలం వైశాల్యం 528 చ.మీ. ఆ స్థలం పొడవు దాని వెడల్పునకు రెట్టింపు కన్నా ఒక మీటరు ఎక్కువ”. ఈ సమాచారానికి తగిన వర్గ సమీకరణంను రాయండి.

17. $3x^2-5x+2=0$ వర్గ సమీకరణానికి $1, \frac{2}{3}$ లు మూలాలు అవుతాయో సరిచూడండి.

18. $x^2-5x+k=0$ వర్గ సమీకరణ ఒక మూలం 2 అయిన, ‘k’ విలువను కనుగొనండి.

19. -2 మరియు -3 లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణంను రాయండి.

20. $4+\sqrt{15}$ మరియు $4-\sqrt{15}$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణంను రాయండి.

21. ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణాలకు కారణాంక పద్ధతిలో మూలాలను కనుగొనండి.

a) $x^2-3x-10=0$

b) $x^2-5x+6=0$

c) $x^2+5x+6=0$

d) $x^2-5x-6=0$

e) $x^2+5x+6=0$

f) $100x^2-20x+1=0$

g) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$

h) $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

22. ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణాలకు సూత్ర పద్ధతిలో మూలాలను కనుగొనండి.

a) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

b) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

d) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

23. ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణాలకు మూలాల స్వభావం కనుగొనండి.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $x^2 + 4x + 5 = 0$

d) $x + \frac{1}{x} = 3 (x \neq 0)$

24. “ $x^2+1=0$ వర్గ సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు కలవు” అని దత్తు చెప్పాడు. నీవు అతనితో ఏకీభవిస్తావా? మీ సమాధానాన్ని సహేతుకంగా వివరించండి.

25. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b) = 0$ ($b \neq c$) వర్గ సమీకరణాల మూలాలు సమానం అయిన, $2b=a+c$ అని చూపండి.

26. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 18 మరియు వాటి లబ్ధం 56 అయిన, ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

27. ఒక సంఖ్య మరియు దాని వ్యుత్క్రమాల మొత్తం $\frac{10}{3}$ అయిన, ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

28. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణము, దాని మిక్కిలి చిన్న భుజం రెట్టింపు కన్నా 6 మీటర్లు ఎక్కువ. మూడవ భుజం కర్ణం కన్నా 2 మీటర్లు తక్కువ, అయిన ఆ త్రిభుజ భుజాలను కనుగొనుము.

29. రెండు వరుస ధనపూర్ణ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం 365, అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

శ్రేణులు

ఒక సంఖ్య జాబితాతో మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన అన్ని పదాలు వాని ముందున్న పదానికి ఏదో ఒక స్థిర సంఖ్యను కలుపటము వల్ల వస్తూ ఉండే ఆ జాబితాను “అంకశ్రేణి” అంటాము.

- ◆ కలిపే స్థిర సంఖ్యను ‘సామాన్య భేదం’ లేదా ‘పదాంతరము’ అంటారు.
- ◆ ఒక అంకశ్రేణిలోని మొదటి పదం a , రెండవ పదమును a_2, \dots, n వ పదమును a_n మరియు సామాన్య భేదం 'd' అనుకొనిన అంకశ్రేణి $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ మరియు $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$
- ◆ మొదటి పదము a , సామాన్య భేదం d గా ఉంటే అంకశ్రేణి యొక్క 'n'వ పదము $a_n = a + (n-1)d$, a_n ను అంకశ్రేణి యొక్క సాధారణ పదము అని కూడా అంటారు.
- ◆ ఒక అంకశ్రేణిలో మొదటి పదము, చివరి పదముల మాత్రమే తెలిసి సామాన్య భేదం తెలియనప్పుడు, శ్రేణిలో మొదటి n పదముల మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$ లేదా $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ l - చివరి పదము.
- ◆ అంకశ్రేణిలో మొదటి n పదముల మొత్తము S_n

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ఇందులో n -పదముల సంఖ్య

a - మొదటి పదం

d - సామాన్య భేదం

S_n -n పదముల మొత్తం

Practice problems

1. మొదటి 100 సహజ సంఖ్యల మొత్తము []
 A) 4050 B) 10100 C) 55 D) 5050
2. $x-1, x+3, 3x-1$ లు అంకశ్రేణిలో ఉన్నవి, అయినచో x విలువ []
 A) 5 B) 8 C) 6 D) 4

3. 125, 120, 115 అంకశ్రేణిలో ఋణ సంఖ్య ఎన్నవ పదము? []
 A) 25వ పదము B) 26వ పదము C) 24వ పదము D) 27వ పదము
4. ఒక అంకశ్రేణిలో $a_{26} - a_{25} = 15$ అయిన, సామాన్య భేదము ఎంత? []
 A) 3 B) 5 C) 7 D) 15
5. 101 మరియు 250 ల మధ్య నున్న సంఖ్యలలో 4వే భాగింపబడే సంఖ్యల సంఖ్య ఎంత? []
 A) 40 B) 62 C) 38 D) 37
6. ఒక అంకశ్రేణి 4, 7, 10 లో 15 పదాల మొత్తము ఎంత? []
 A) 315 B) 475 C) 375 D) 325
7. 1, -1, -3, -5, అంకశ్రేణిలో సామాన్య భేదం $d=?$ []
 A) -2 B) 1 C) 2 D) 10
8. ఒక అంకశ్రేణిలో $a_1 = -4$, $a_6 = 6$ మరియు $a_2 =$ []
 A) 3 B) 6 C) 1 D) -2
9. 1.1, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5, శ్రేణిలో 17వ పదము []
 A) 18.7 B) 19.8 C) 17.6 D) 17.17
10. అంకశ్రేణి 100, 90, 80 ఎన్నవ పదము '0' []
 A) 10వ పదము B) 9వ పదము C) 11వ పదము D) 4వ పదము
11. అంకశ్రేణి 3, 6, 9, 12 111లో ఎన్ని పదాలున్నాయి.
12. 11, 8, 5, 2, అంకశ్రేణిలో '-150' ఒక పదముగా ఉంటుందో లేదో పరిశీలించుము / కనుగొనుము.
13. రెండు అంకెల సంఖ్యలలో 5 యొక్క గుణిజాల మొత్తము ఎంత?
14. -1, 3, 7, 11, అంకశ్రేణిలో ఎన్నవ పదము 95 అవుతుంది?
15. ఒక అంకశ్రేణిలో 'n' వ పదము $a_n = \frac{n(n-3)}{n+4}$ అయితే 18వ పదమును కనుగొనుము.

16. 10, 7, 4 అంకశ్రేణిలో 30వ పదమును కనుగొనుము.
17. ఒక అంకశ్రేణిలో 7వ పదమునకు 7 రెట్లు, 11వ పదమునకు 11 రెట్లు సమానము అయిన, 18వ పదము సున్నాకు సమానము అని నిరూపించుము.
18. ఒక అంకశ్రేణిలో 4వ పదము మరియు 8వ పదముల మొత్తము 24 మరియు 6వ పదము, 10వ పదము మొత్తము 44. అయినచో అంకశ్రేణిలో మొదటి మూడు పదముల మొత్తము ఎంత?
19. ఒక అంకశ్రేణిలో మొదట, చివర పదములు వరుసగా 17 మరియు 350 సామాన్య భేదము 9 అయినచో అంకశ్రేణిలో యున్న పదముల సంఖ్య ఎంత? వాటి మొత్తము ఎంత?
20. ఒక చతుర్భుజములోని కోణములు అంకశ్రేణిలో యున్నవి. చతుర్భుజములోని అతి చిన్న కోణము, అతి పెద్దకోణములో నాలుగవ వంతు యున్నది. అయినచో ఆ చతుర్భుజములోని కోణములను కనుగొనుము.

నిరూపక జ్యామితి

1. నిరూపక తలంలోని రెండు బిందువుల మధ్య దూరం

బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ ఒకే తలంలోనున్న వాటి మధ్య దూరం

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

నిరూపక తలంలోనున్న ఒక బిందువు $P(x, y)$ మరియు నిరూపకతలం యొక్క మూల బిందువు 'O' కు

గల మధ్య దూరం $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. జ్యామితీయ ఆకారాల ఆధారంగా సమస్యలు

ఇచ్చిన జ్యామితీయ ఆకారం శీర్షాల ఆధారంగా నిరూపించుటకై

- i) సమాంతర చతుర్భుజం : ఎదురెదురు భుజాలు సమానం అని చూపవలెను.
- ii) దీర్ఘచతురస్రం : ఎదురెదురు భుజాలు సమానం మరియు కర్ణాలు సమానం అని చూపవలెను.
- iii) రాంబస్ (సమ చతుర్భుజం) : నాలుగు భుజాలు సమానం అని చూపవలెను.
- iv) చతురస్రం : నాలుగు భుజాలు సమానం మరియు కర్ణాలు సమానం అని చూపవలెను.
- v) సమద్విబాహు త్రిభుజం : ఏవేని రెండు భుజాల పొడవులు సమానం అని చూపవలెను.
- vi) సమబాహు త్రిభుజం : అన్ని (మూడు) భుజాలు సమానమని చూపాలి.
- vii) లంబకోణ త్రిభుజం : పైథాగరగన్ సిద్ధాంతాన్ని తృప్తిపరిచేలా భుజాలు ఉన్నాయేమో నిరూపించాలి.

3. విభజన సూత్రం

బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండాన్ని బిందువు $P(x, y)$ అంతరంగా $m_1:m_2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తే

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

4. మధ్య బిందువు సూత్రం

బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండం యొక్క మధ్య బిందువు $P(x, y)$ అయితే

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

5. గురుత్వ కేంద్రం

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ బిందువులుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రం

$$G(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

6. త్రిధాకరణ బిందువులు

ఒక రేఖాఖండాన్ని 1:2 మరియు 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువులు త్రిధాకరణ బిందువులు అంటారు.

7. బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ల ద్వారా ప్రయాణించు రేఖ వాలు $m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Practice problems

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

- నిరూపక తలంలో మూల బిందువు నుండి $P(4, -3)$ కు మధ్యగల దూరం []
a) 1 unit b) 7 units c) 5 units d) 3 units
- బిందువులు $A(2, -3)$ మరియు $B(2, 2)$ లుగా గల రేఖాఖండం యొక్క మధ్య దూరం []
a) 2 units b) 4 units c) 5 units d) 3 units

3. చివరి బిందువులు (-3, 4) మరియు (10, -5) లుగా గల రేఖాఖండం యొక్క మధ్య బిందువు []
a) (-13, -9) b) (-6.5, -4.5)
c) (3.5, 0.5) d) ఏదీకాదు
4. బిందువులు (2, 3) మరియు (x, y) లను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండం మధ్య బిందువు మూల బిందువు అయితే (x, y) విలువ []
a) (0, -3) b) (2, 3) c) (-2, 3) d) (-2, -3)
5. X-అక్షం నుండి బిందువు P(2, 3) కి గల దూరం యూనిట్లు []
a) 2 b) 3 c) 1 d) 5
6. X-అక్షం మీది బిందువు నిరూపకాలు []
a) (a, 0) b) (0, a) c) (-a, 5) d) (0, -a)
7. Y-అక్షం మీది బిందువు నిరూపకాలు []
a) (-a, 0) b) (a, 0) c) (0, b) d) (-a, -b)
8. బిందువులు (5, 3) మరియు (6, 3) లను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ వాలు []
a) 2 b) 1 c) 0 d) నిర్వచించలేము
9. ఒక త్రిభుజంలో ఒక శీర్షం నుండి గీయబడిన మధ్యగతరేఖను గురుత్వ కేంద్రం ఈ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. []
a) 1:3 b) 2:1 c) 3:1 d) 1:1
10. బిందువులు (0, 6), (8, 12) మరియు (8, 0) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్ర నిరూపకాలు []
a) (4, 6) b) (16, 6) c) (8, 6) d) ($\frac{16}{3}$, 6)

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. బిందువులు A(-3, 3) మరియు B(3, -3) ల మధ్య దూరం కనుగొనండి.
2. X-అక్షంతో 60° ల కోణం చేస్తున్న రేఖ వాలు కనుగొనండి.

3. ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసపు ఒకవైపు చివరి బిందువు (3, 4) మరియు ఆ వృత్త కేంద్రం (1, 2) అయిన, రెండవ చివర బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.
4. బిందువులు (8, x) మరియు (x, 8) ల మధ్య దూరం $2\sqrt{2}$ యూనిట్లు, అయిన x విలువ ఎంత?
5. బిందువులు A(0, 0), B(1, 4) మరియు C(2, -2) లు శీర్షాలు గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం కనుగొనండి.
6. బిందువులు (4, -3), (8, 5) లను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండాన్ని 3 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.
7. బిందువులు A(-3, 3), B(0, 0), C(3, -3) లు సరేఖీయాలు అని చూపండి. (దీనిని $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ భావనను ఉపయోగించండి).
9. P(2, 5), Q(x, 3) లచే ఏర్పడిన \overline{PQ} రేఖ వాలు '2' అయిన, x విలువ ఎంత?

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

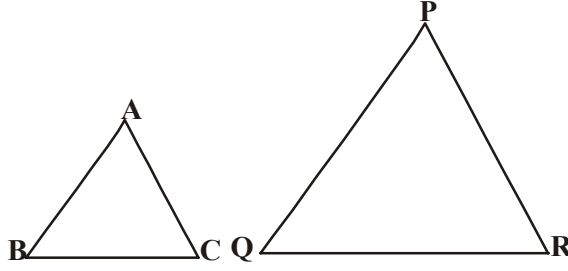
1. బిందువులు A(3, 2), B(-1, 2) లతో ఏర్పడే రేఖాఖండంను Y- అక్షం ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?
2. బిందువులు A(2, -5), B(-2, 9) ల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటూ X-అక్షం మీది బిందువును కనుగొనండి.
3. బిందువులు (7, -2), (5, 1), (3, k) లు సరేఖీయాలైతే k విలువ ఎంత? (దీనిని $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ భావనను ఉపయోగించండి).
4. బిందువులు A(3, 6), B(3, 2), C(8, 2) లు $\square ABCD$ దీర్ఘచతురస్ర శీర్షాలయితే శీర్షం D బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.
5. A(-1, 2), B(1, 0), C(-1, 2) మరియు D(-3, 0) లతో ఏర్పడునది ఏ రకమైన చతుర్భుజమో? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
6. A(a, 0), B(-a, 0), C(0, $a\sqrt{3}$) బిందువులు సమబాహు త్రిభుజ శీర్షాలు అని చూపండి.
7. (-4, -7), (-1, 2), (8, 5), (5, -4) బిందువులు సమచతుర్భుజం (రాంబస్) యొక్క శీర్షాలు అని చూపండి.
8. (-6, 6), (2, 6) బిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండమును (-4, 6) అనే బిందువు ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.
9. బిందువులు A(6, 5) మరియు B(-4, 3) ల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటూ Y-అక్షంపై గల బిందువును కనుగొనండి.
10. బిందువులు (4, -3), (8, 5) లను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండంను 3:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.

వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. బిందువులు A(1, 2), B(5, 4), C(3, 8) మరియు D(-1, 6) ఒక చతురస్రం యొక్క శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.
2. బిందువులు A(-2, -1), B(1, 0), C(4, 3) మరియు D(1, 2) లు ఒక సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.
3. (4, -1) మరియు (-2, -3) బిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖాఖండమును త్రిభాకరణ బిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనండి.
4. A(10, -6) మరియు (k, 4) బిందువులతో ఏర్పడిన రేఖాఖండం యొక్క మధ్య బిందువు (a, b) మరియు $a-2b=18$ అయితే 'a', 'b' ల విలువలు కనుగొనండి.
5. (-8, 4), (P, 6) మరియు (-3, 9) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం $\left(\frac{-17}{3}, \frac{19}{3}\right)$ అయితే, 'P' విలువ ఎంత?
6. (5, 1), (-2, -3) మరియు (8, 2m) లు సరేఖీయాలు అయితే m' విలువ ఎంత? ($\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ భావనను ఉపయోగించండి.)

సరూప త్రిభుజాలు

1. సరూప పటాలు: ఒకే ఆకారం కలిగి, తప్పనిసరిగా ఒకే పరిమాణం ఉండనవసరం లేని రెండు జ్యామితీయ పటాలను సరూప పటాలు అంటారు.
2. సరూప త్రిభుజాలు: రెండు త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు కావాలంటే
 - i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉండాలి.
 - ii) వాటి అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో (ఒకే నిష్పత్తిలో) ఉండాలి.



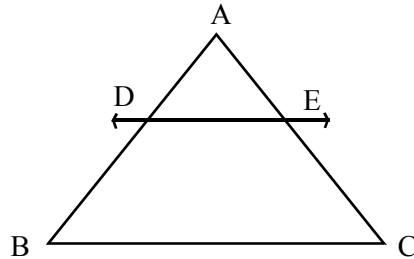
$$\triangle ABC \sim \triangle PQR \Leftrightarrow \text{i) } \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$$

$$\text{ii) } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

3. ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం లేదా థేల్స్ సిద్ధాంతం

ఒక త్రిభుజంలోని ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన సరళరేఖ ఆ త్రిభుజంలోని మిగిలిన రెండు భుజాలను సమాన నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

$$\triangle ABC \text{ లో } DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



ఫలితాలు

$$i) \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$ii) \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$iii) \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$iv) \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

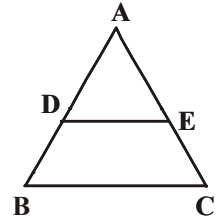
$$v) \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$vi) \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

4. ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము:

ఒక రేఖ త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో ఒక రేఖ ఖండిస్తే అది మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

$$\triangle ABC \text{ లో } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE // BC$$



5. సరూప త్రిభుజాల నియమాలు:

i) కో.కో.కో. సరూప నియమం (కో.కో. సరూప నియమం)

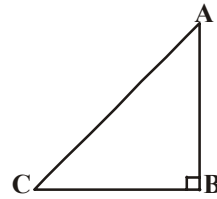
ii) భు.కో.భు. సరూప నియమం

iii) భు.భు.భు. సరూప నియమం

6. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాలు వర్గములు మొత్తానికి సమానం.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



Practice problems

1. ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క భుజం 'a' అయితే దాని ఉన్నతి? []

A) $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2} a$

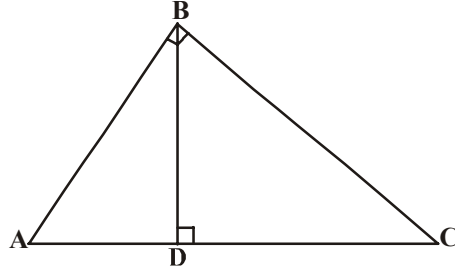
C) $\sqrt{3}a$

D) $\sqrt{2}a$

2. త్రిభుజం $\triangle ABC$, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ అయిన $\angle B$? []

- A) 30° B) 60° C) 48° D) 90°

3. క్రింది పటం నుండి ఏది సత్యం? []



- A) $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ B) $\triangle ABC \sim \triangle BDC$
 C) $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ D) All the above

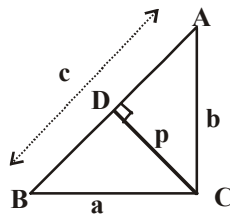
4. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$; $\angle A + \angle B = 100^\circ$ అయితే $\angle R = ?$ []

- A) 100° B) 80° C) 90° D) 50°

5. If $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$ మరియు $\angle P = 60^\circ$, $\angle Q = 50^\circ$, $\angle R = 70^\circ$ అయిన క్రింది వాటిలో ఏది సత్యం? []

- A) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ B) $\triangle ABC \sim \triangle QPR$
 C) $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$ D) పైవన్నీ సత్యం

6. ప్రక్క పటం నుండి ఏది సత్యం? []

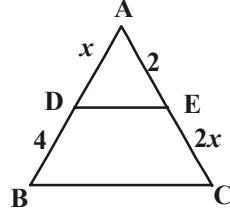


- A) $pc = ab$ B) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2}$ C) $p^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ D) పైవన్నీ సత్యం

7. లంబకోణ త్రిభుజం $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 20$, $BC = 15$, అయిన $AC = ?$ []

- A) 20 B) 10 C) 25 D) 225

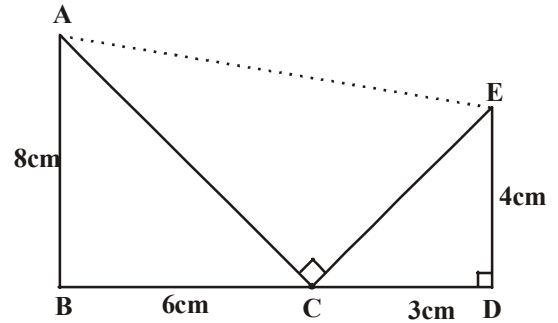
8. పటం నుండి 'x' విలువ ఎంత? $DE \parallel BC$ []



- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

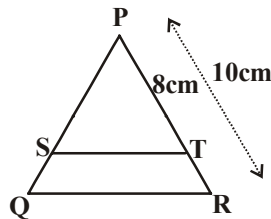
అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. కౌశిక్ తూర్పు వైపు 12 మీ. నడిచి అక్కడి నుండి ఎడమవైపు తిరిగి 5 మీ. నడిచినచో అతడు తన ప్రారంభ స్థానం నుండి ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు?
2. సమద్విభాహు త్రిభుజం ABC లో $\angle B = 90^\circ$ అయిన $AC^2 = 2AB^2$ అని చూపండి.
3. త్రిభుజం DEW, $AB \parallel EW$, $AD = 4\text{cm}$, $DE = 12\text{cm}$ మరియు $DW = 24\text{cm}$ అయిన 'DB' విలువ ఎంత?
4. త్రిభుజం ABC లో, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$ మరియు $CA = 6\sqrt{3}\text{cm}$ అయిన $\angle A$ విలువ ఎంత? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
5. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $DE = 2AB$ మరియు $BC = 3\text{cm}$ అయినచో, $EF = 3\text{cm}$ అవుతుందా? దీనిని సకారణంగా సమర్థించండి.
6. ప్రక్క పటం నుండి AE భుజం పొడవు ఎంత?

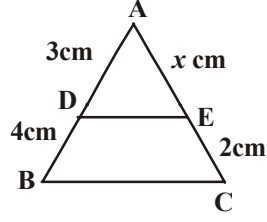


స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

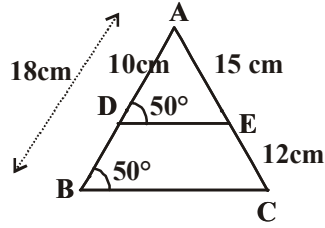
1. ప్రక్క పటంలో $ST \parallel QR$, $PT = 8\text{cm}$ మరియు $PR = 10\text{cm}$, అయిన $\frac{PS}{SQ}$ విలువ ఎంత?



2. ప్రక్క పటంలో $DE \parallel BC$ అయితే AE ఎంత?

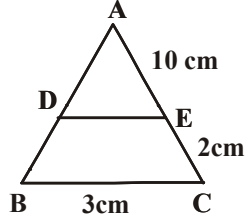


3. ప్రక్క పటం ద్వారా సరూప త్రిభుజాలు పేర్కొనండి.



4. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC, మరొక త్రిభుజం PQRలు సరూపాలు. $AC=AB=4\text{cm}$, $PQ=10\text{cm}$ మరియు $BC=6\text{cm}$ అయిన, $PR=?$ ΔPQR ఏ రకమైన త్రిభుజమో చెప్పగలరా?

5. క్రింది పటంలో $DE \parallel BC$ అయిన $DE=?$



6. త్రిభుజాలు ABC మరియు PQR లలో $\angle B = \angle Q$ మరియు $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$ అయినచో $\frac{PR}{QR}$ విలువ ఎంత?

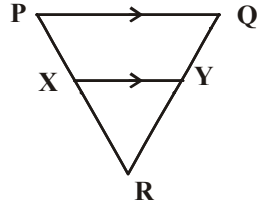
7. ΔABC లో $AD=8\text{cm}$, $DB=6\text{cm}$, $AE=12\text{cm}$, $EC=9\text{cm}$ అయినచో $DE \parallel BC$ అవుతుందా?

8. ΔPQR లో $RA=4\text{cm}$, $RB=4\text{cm}$, $AP=2\text{cm}$ మరియు $BQ=8\text{cm}$ అయిన $AB \parallel PQ$ అవుతుందా?

వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

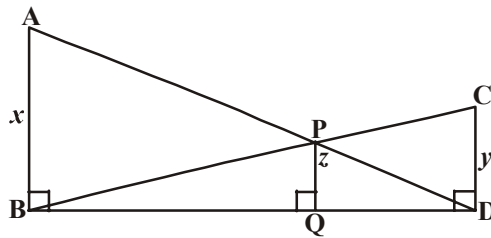
1. భుజాల కొలతలు 5cm, 6cm మరియు 7cm ఉండే విధంగా ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. ఈ త్రిభుజంలోని ప్రతి అనురూప భుజాలు $\frac{2}{3}$ రెట్లుండే విధంగా మరొక సరూప త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

2. ΔPQR లో, $XY \parallel PQ$ అయి $\frac{PX}{XR} = \frac{5}{3}$ మరియు $QR=7.2\text{cm}$ అయిన RY పొడవు ఎంత?

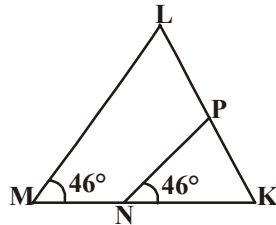


3. ప్రక్క పటంలో AB, CD, PQ లు BD భుజానికి లంబంగా ఉన్నాయి. $AB=x, CD=y$ and $PQ=z$.

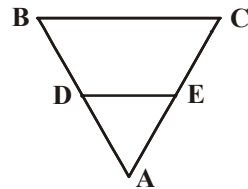
Prove that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.



4. ప్రక్క పటం నుండి $\angle M = \angle N = 46^\circ$ అయినచో x యొక్క విలువను a, b మరియు c పదాలతో తెలపండి. ఇక్కడ $a=LM, b=MN$ మరియు $c=NK$ గా తీసుకోబడినది.

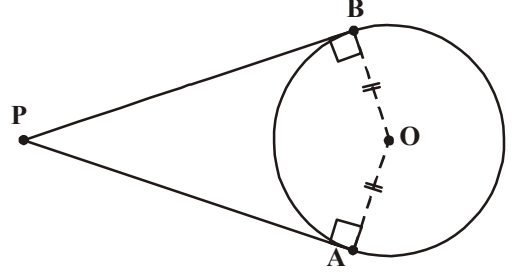


5. ప్రక్క పటం నుండి ΔABC లో $DE \parallel BC$ మరియు $BC=8\text{cm}, AB=6\text{cm}, DA=1.5\text{cm}$ అయినచో DE విలువ ఎంత?



వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు మరియు చేదన రేఖలు

- ◆ ఒక వృత్తము పై ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబముగా ఉంటుంది.
- ◆ ఒక తలములో వృత్తముపై గల వ్యాసార్థము యొక్క చివరి బిందువు గుండా గీయబడిన రేఖ దానికి లంబముగా వున్నచో ఆ రేఖ వృత్తానికి “స్పర్శరేఖ” అగును.
- ◆ వృత్తానికి బాహ్యబిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవులు సమానము.
- ◆ వృత్తానికి బాహ్య బిందువు నుండి గీయ గలిగిన గరిష్ట స్పర్శరేఖల సంఖ్య 2.



Practice problems

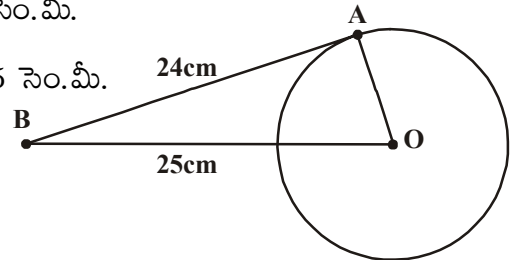
1. B అనే బిందువు నుండి వృత్తము మీదకు గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవు 24 సెం.మీ. మరియు వృత్త కేంద్రము నుండి B బిందువుకు గల దూరము 25 సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థము. []

A) 7 సెం.మీ.

B) 12 సెం.మీ.

C) 15 సెం.మీ.

D) 24.5 సెం.మీ.



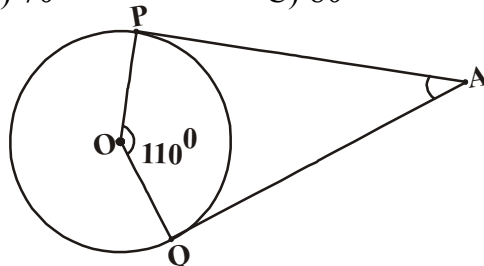
2. ప్రక్క పటములో 'Q' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి AP మరియు AQ లు రెండు స్పర్శరేఖలు మరియు $\angle QOP = 110^\circ$ అయిన $\angle PAQ = ?$ []

A) 60°

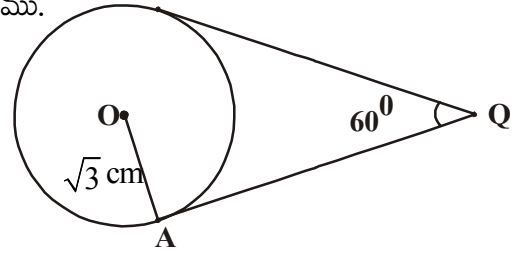
B) 70°

C) 80°

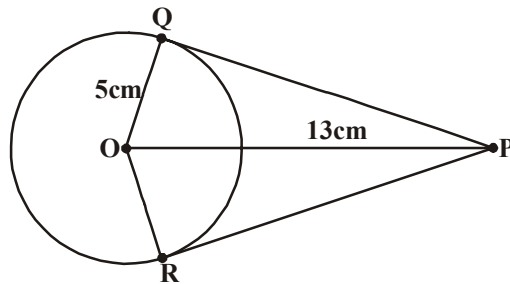
D) 90°



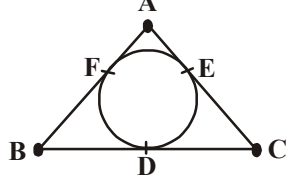
3. ఒక వృత్త స్పర్శరేఖ స్పర్శ బిందువు గుండా గీచిన వ్యాసార్థానికి మధ్య కోణము []
 A) 60° B) 30° C) 45° D) 90°
4. బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు గీయు గల స్పర్శ రేఖలు సంఖ్య []
 A) 2 B) 3 C) 1 D) అనంతము
5. వృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖ వృత్తమును స్పృశించు బిందువులు సంఖ్య []
 A) 2 B) 1 C) 3 D) అనంతము
6. ఒక వృత్తమునకు గీయ గల స్పర్శరేఖల సంఖ్య []
 A) 2 B) 1 C) 3 D) అనంతము
7. వృత్త కేంద్రము నుండి 15 సెం.మీ. దూరములో యున్న బిందువు నుండి వృత్తమునకు గీచిన స్పర్శరేఖ పొడవు ఎంత? వృత్త వ్యాసార్థము 9 సెం.మీ. []
 A) 10 సెం.మీ. B) 13 సెం.మీ. C) 12 సెం.మీ. D) 14 సెం.మీ.
8. ఒక చతుర్భుజము ABCD లో ఒక వృత్తము అంతర్లిఖించబడినది అయినచో $AB+CD=AD+BC$ అని చూపుము.
9. ఒక వృత్తములో అంతర్లిఖించబడిన సమాంతర చతుర్భుజము ఒక 'సమ చతుర్భుజము' అని నిరూపించుము.
10. $\sqrt{3}$ సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తమునకు బాహ్యబిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము 60° అయినచో ఆ స్పర్శరేఖ పొడవు కనుగొనుము.



11. ప్రక్క పటములో 'O' వృత్త కేంద్రము బాహ్య బిందువు P నుండి వృత్త కేంద్రమునకు గల దూరము $OP=13$ సెం.మీ. వృత్త వ్యాసార్థము $OQ=5$ సెం.మీ. P నుండి వృత్తమునకు గీయబడిన స్పర్శరేఖలు PQ, PR అయినచో చతుర్భుజము PQOR వైశాల్యమును కనుగొనుము (చ. సెం.మీ.లలో)



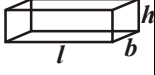
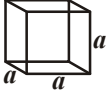
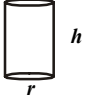
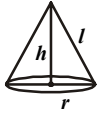
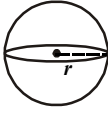
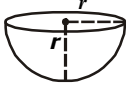
12. పటములో చూపిన విధముగా తిభుజము ABC లో ఒక వృత్తము అంతర్లింఛబడినది. AB=13 సెం.మీ. BC=14 సెం.మీ., AE=7 సెం.మీ. అయినఛో AC విలువను కనుగొనుము.



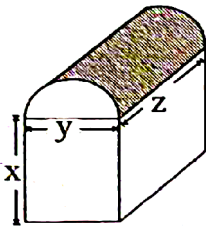



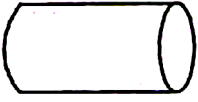

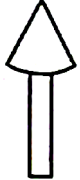


13. వృత్త వ్యాసార్థము 5 సెం.మీ. మరియు రెంఛు స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము 60° ఉండేటట్లు ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయండి.
14. 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తమును గీయండి. కేంద్రము నుండి 10 సెం.మీ. దూరములో గల బిందువు నుండి ఒక జత స్పర్శరేఖలను గీయుము.
15. 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తమును గీయండి. వృత్త కేంద్రము 'O' నుండి 8 సెం.మీ. దూరములో ఉన్న బిందువు నుండి ఒక జత స్పర్శరేఖలు AB, ACలను గీయుము.

కేత్రమితి

వివిధ ఘనకృతులు, వాటి ఉపరితలవైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములు

వ. సం.	ఘనకృతి పేరు	ఆకృతి	ఉపరితలవైశాల్యం(LSA) / వక్రతలవైశాల్యం(CSA)	సంపూర్ణతల వైశాల్యం(TSA)	ఘనపరిమాణం (V)	సంకేత వివరణ
1	దీర్ఘఘనం		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l :పొడవు b :వెడల్పు h :ఎత్తు
2	సమఘనం		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a :ఘనపు భుజం
3	క్రమ వృత్తాకార స్థూపం		$2\pi rh$	$2\pi(r+h)$	$\pi r^2 h$	r :భూవ్యాసార్థం h :ఎత్తు
4	క్రమ వృత్తాకార శంఖువు		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	r :భూవ్యాసార్థం h :ఎత్తు l :ఏటవాలు ఎత్తు
5	గోళం		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3} \pi r^3$	r :వ్యాసార్థం
6	అర్థగోళం		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3} \pi r^3$	r :వ్యాసార్థం

ఘనాకృతులు	పటం	ఆకారాల సమ్మేళనం
ట్యాంకర్		స్థూపం + రెండు అర్ధగోళాలు
నీటి బిందువు/ ఆటవస్తువు		శంకువు + అర్ధగోళం
పెట్టె		దీర్ఘఘనం మరియు స్థూపం
చెక్కిన పెన్సిల్		స్థూపం + శంకువు + అర్ధగోళం
ఐస్ క్రీం కోన్ (శంకువు)		శంకువు + అర్ధగోళం
గరాటు (ఫన్నెల్)		శంకువు + స్థూపం
పరీక్షనాళిక		స్థూపం + అర్ధగోళం
మందుబిళ్ళ		స్థూపం + రెండు అర్ధగోళాలు
రాకెట్		శంకువు + స్థూపం

Mark Questions (Objective type Questions)

1. రెండు గోళాల ఉపరితల వైశాల్యాల నిష్పత్తి 4:9 అయిన వాటి ఘన పరిమాణాల నిష్పత్తి []
 A) 27 : 8 B) 8:27 C) 1:9 D) 2:3
2. ఒక శంఖువు యొక్క వ్యాసార్థం r , ఎత్తు h , ఏటవాలు ఎత్తు l అయితే. ఈ క్రింది వానిలో ఏది సత్యం []
 A) $l^2 > r^2 + h^2$ B) $l^2 < r^2 + h^2$ C) $l^2 = r^2 + h^2$ D) $l^2 = h^2 - r^2$
3. సమాన భూమి మరియు సమాన ఎత్తు కలిగిన స్థూపం మరియు శంఖువుల ఘనపరిమాణాల నిష్పత్తి = []
 A) 1:3 B) 3:1 C) 2:3 D) 3:2
4. ' r ' వ్యాసార్థం కలిగిన అర్థ గోళం యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యం = []
 A) $2\pi r^2$ B) $3\pi r^2$ C) $4\pi r^2$ D) $\frac{4}{3}\pi r^3$
5. ఒక సమఘనం యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యం $864c.m^2$ అయితే ఆ సమఘనం యొక్క భుజం = సెం.మీ. []
 A) 10 B) 12 C) 14 D) 16
6. ఒక శంఖువు వ్యాసం మరియు ఎత్తులు వరుసగా 8 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ అయిన దాని ఏటవాలు ఎత్తు = సెం.మీ. []
 A) 4 B) 5 C) 6 D) 7
7. ' a ' యూనిట్లు భుజంగా గల సమఘనంలో అంతర్లిఖితమైన గోళం వ్యాసం యూనిట్లు []
 A) $\sqrt{2a}$ B) $\sqrt{3a}$ C) $2a$ D) a
8. స్థూపాకార పాత్ర ఘనపరిమాణము 125π ఘ. సెం.మీ మరియు దాని ఎత్తు 5 సెం.మీ. అయితే దాని వ్యాసార్థం = సెం.మీ []
 A) 25 B) 625 C) 5 D) 125

9. ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని దాని కర్ణం పరంగా భ్రమణం చేస్తే అది
ను ఏర్పరుస్తుంది. []
- A) గోళం B) శంఖువు C) అర్ధగోళం D) పిరమిడ్
10. 'a' పొడవు 'b' వెడల్పు మరియు 'c' ఎత్తు కలిగిన దీర్ఘ ఘనం యొక్క ప్రక్క తల వైశాల్యం = చ. []
- A) $2a(b+c)$ B) $2b(a+c)$ C) $2c(a+b)$ D) $2a+2b+2c$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

- ఒక శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనే సూత్రమును రాసి అందులోని పదాలను విశదీకరించండి.
- ఒక స్థూపము యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యమును కనుగొనే సూత్రమును రాసి అందులోని పదాలను విశదీకరించండి.
- అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనే సూత్రమును రాసి అందులోని పదాలను విశదీకరించండి.
- ఒక శంఖువు యొక్క భూ వ్యాసము 12 సెం.మీ మరియు దాని ఎత్తు 8 సెం.మీలు అయితే దాని ప్రక్కతల వైశాల్యంను కనుగొనుము.
- ఒక అర్ధ గోళాకార గిన్నె యొక్క వ్యాసార్థం 21 సెం.మీ అయితే ఆ గిన్నె యొక్క ఘన పరిమాణమును కనుగొనండి.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

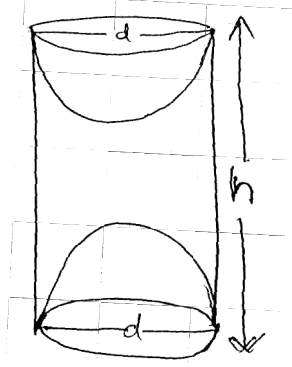
- సమాన భూమి మరియు సమాన ఎత్తు కలిగిన ఒక స్థూపం, శంఖువు మరియు అర్ధగోళము యొక్క ఘన పరిమాణాల నిష్పత్తి 3:1:2 అని చూపండి.
- 27 ఘనపు సెం.మీల ఘనపరిమాణము గల రెండు సమ ఘనములు కలుపబడినవి. అయిన ఏర్పడిన కొత్త ఘనాకృతి యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యంను కనుగొనండి.
- ఒక స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $264m^2$ మరియు దాని ఘన పరిమాణము $924m^3$ అయితే ఆ స్థూపం యొక్క యొక్క భూ వ్యాసం మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

4. “ఒక గోళము యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము 16π చ.యు అయితే ఇంతే వ్యాసార్థము గల అర్థ గోళము యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యం 8π ఉంటుందనే వాదనతో మీరు ఏకీభవిస్తారా? మీ సమాధానాన్ని సరైన కారణంతో సమర్థించండి.
5. ఒక స్థూపము యొక్క వ్యాసార్థాన్ని రెట్టింపు చేసి, దాని ఎత్తును సగము చేసిన ఏర్పడిన నూతన స్థూపము యొక్క ప్రక్క తల వైశాల్యం, ఘన పరిమాణములలో ఏ విధమయిన మార్పు ఉంటుందో తెల్పండి.
6. '1' ఘన పరిమాణము కలిగిన ఒక శంఖువులో సగం ఎత్తు వరకు నీటిని పోస్తే, ఆ నీటి ఘన పరిమాణమును కనుగొనండి.
7. ఒక స్థూపాకార పాత్రలో ఒక గోళము అంతర్లిఖించబడింది. అయినచో గోళము, స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యమునకు సమానమగునా? సహేతుకంగా వివరించండి.

8 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. అర్థ గోళముపై స్థూపము అమర్చబడినట్లు ఉన్న ఒక పాత్ర యొక్క వ్యాసము 14 సెం.మీ మరియు మొత్తము ఎత్తు 13 సెం.మీ అయిన ఆ పాత్ర ఘన పరిమాణమును కనుగొనుము.
2. 21 సెం.మీల భుజము కలిగిన ఒక సమఘనపు దిమ్మెలోని ఒక వైపు దాని భుజము పొడవుకు సమానమయిన వ్యాసము గల అర్థగోళాకార భాగము తొలగించబడినది. అయిన మిగిలిన దిమ్మె యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
3. చెక్కతో తయారు చేసిన ఒక బొమ్మ అర్థ గోళముపై ఒక శంఖువు అతికించబడినట్లుగా ఉన్నది. మరియు అర్థగోళము యొక్క వ్యాసార్థము 4.2 సెం.మీలు మరియు ఆ బొమ్మ యొక్క మొత్తం ఎత్తు 10.2 సెం.మీలు అయితే ఆ బొమ్మ యొక్క ఘన పరిమాణాన్ని కనుగొనండి.
4. ఒక వస్తువు, ఒక స్థూపానికి చెరొక వైపు అర్థగోళాలు అతికించబడినట్లుగా ఉన్నది. ఆ వస్తువు యొక్క మొత్తం ఎత్తు 19 సెం.మీలు మరియు స్థూపము యొక్క వ్యాసము 7 సెం.మీలు అయితే ఆ వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము మరియు సంపూర్ణ తల వైశాల్యమును కనుగొనండి.
5. ఒక చెక్కతో తయారు చేసిన ఆట వస్తువు స్థూపానికి ఒక చివర శంఖువు మరొక చివర అర్థగోళము అతికించినట్లుగా ఉన్నది. వాటి సామాన్య వ్యాసము 4. సెం.మీలు స్థూపాకార భాగం మరియు శంఖువు ఆకార భాగం ఎత్తులు వరుసగా 12 సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీలు అయితే ఆ ఆట వస్తువు ఘన పరిమాణాన్ని కనుగొనండి.

6. చెక్కతో తయారు చేయబడిన ఒక వస్తువు, ఒక స్థూపమునకు ఇరువైపుల నుండి అర్థగోళాలు తొలగించినట్లుగా పటంలో చూపినట్లుగా ఉన్నది. స్థూపము యొక్క ఎత్తు 10 సెం.మీలు మరియు దాని భూ వ్యాసార్థం 3.5 సెం.మీ. అయితే ఆ వస్తువు సంపూర్ణ తల వైశాల్యంను కనుగొనుము.



7. 60 సెం.మీల ఎత్తు మరియు 30 సెం.మీల వ్యాసార్థం గల ఒక ఘనాకార శంఖువును, 180 సెం.మీల ఎత్తు మరియు 60 సెం.మీల వ్యాసార్థం కలిగి, నీటితో నింపబడి ఉన్న ఒక స్థూపాకార పాత్రలో జారవిడిస్తే, ఆ స్థూపాకార పాత్రలో మిగిలి ఉన్న నీటి ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనండి. (క్యూబిక్ మీటర్లలో) ($\pi = \frac{22}{7}$)
8. 2.4 సెం.మీల ఎత్తు మరియు 1.4 సెం.మీల భూ వ్యాసము కలిగిన ఒక ఘనాకార స్థూపము నుండి అంతే ఎత్తు మరియు అంతే వ్యాసము కలిగిన ఒక శంఖువును తొలగిస్తే మిగిలిన ఘనాకార భాగం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.

త్రికోణమితి

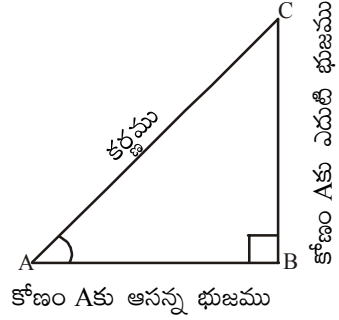
1. లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలు:

$\angle A$ దృష్ట్యా పరిశీలించినట్లయితే

భుజము AB అనునది $\angle A$ కు ఆసన్న భుజము

భుజము BC అనునది $\angle A$ కు ఎదుటి భుజము

AC కర్ణము



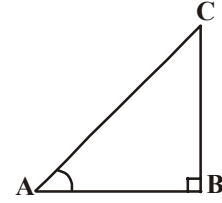
2. త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు:

ఒక లంబకోణ త్రిభుజం $\triangle ABC$ లో $\sqrt{B} = 90^\circ$ అయిన (A దృష్ట్యా)

$$\text{Sin}A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}}$$

$$\text{Cos}A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజపు పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}}$$

$$\text{Tan}A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజపు పొడవు}}$$



3. $\text{Cosec}A = \frac{1}{\text{Sin}A}$

$$\text{Sec}A = \frac{1}{\text{Cos}A}$$

$$\text{Tan}A = \frac{\text{Sin}A}{\text{Cos}A}$$

$$\text{Tan}A = \frac{1}{\text{Cot}A}$$

4. లఘుకోణం యొక్క త్రికోణమితియ నిష్పత్తి విలువ తెలిస్తే, మిగతా నిష్పత్తులను కూడా కనుగొనవచ్చును.
5. ప్రత్యేక కోణాల ($0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) త్రికోణమితియ నిష్పత్తుల విలువలు.

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించబడదు
$\cot A$	నిర్వచించబడదు	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచించబడదు
$\operatorname{cosec} A$	నిర్వచించబడదు	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

6. త్రికోణమితియ సర్వసమీకరణాలు
- i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- ii) $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ (for $0^\circ < A < 90^\circ$)
- iii) $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ (for $0^\circ < A < 90^\circ$)

Practice problems

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు (MCQ)

ఈ క్రింది వాని నుండి సరైన సమాధానాన్ని ఎన్నుకోండి.

1. $(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ) - (\sin 60^\circ + \cos 60^\circ)$ యొక్క విలువ []
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2
2. $\sin \theta = \frac{a}{b}$, అయినచో, $\cos \theta$ విలువ []
- A) $\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ D) $\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

3. త్రిభుజం ABC లో $\angle A$ - ఒక అల్పకోణం మరియు B వద్ద లంబకోణం అయినచో $(\sin A + \cos A)$ విలువ []
- A) ఒకటికి సమానం B) ఒకటి కంటే ఎక్కువ
C) ఒకటి కంటే తక్కువ D) రెండుకు సమానం
4. $\tan \theta = \cot \theta$, అయిన అప్పుడు $\sec \theta =$ []
- A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{2}$
5. $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$ యొక్క విలువ []
- A) $\sin 60^\circ$ B) $\cos 60^\circ$ C) $\tan 60^\circ$ D) $\sin 30^\circ$
6. $\sin \theta - \cos \theta = 0$, అయినచో, $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ విలువ []
- A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{3}$
7. $\sec \theta + \tan \theta = p$, అయినచో, $\tan \theta =$ []
- A) $\frac{p^2+1}{p}$ B) $\frac{p^2-1}{p}$ C) $\frac{p^2+1}{2p}$ D) $\frac{p^2-1}{2p}$
8. $5 \operatorname{Cosec}^2 \theta - 5 \cot^2 \theta =$ []
- A) 1 B) 5 C) 0 D) 10
9. $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$, అయిన $\sin^2 \theta + \cos^4 \theta =$ []
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 4
10. $\tan \theta$ ను $\sin \theta$ లో వ్యక్తపరిచినచో []
- A) $\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$ B) $\frac{\sin \theta}{1-\sin^2 \theta}$ C) $\frac{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}{\sin \theta}$ D) $\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$
11. $(1 + \tan^2 \theta)(1 + \sin \theta) =$ _____ []
- A) $(1 - \sin \theta)$ B) 1 C) $\frac{1}{1-\sin \theta}$ D) ఏదీకాదు

12. $\sin 45^\circ + \tan 45^\circ - \cos x = 1$, అయిన $\tan x = \underline{\hspace{2cm}}$ ($x < 90^\circ$) []
 A) 30° B) 60° C) 90° D) 45°
13. $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ యొక్క విలువ _____ []
 A) $\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta$ B) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$
 C) $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ D) $(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$
14. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = p$, అయిన $\cos\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ []
 A) $\frac{p^2-1}{p^2+1}$ B) $\frac{p^2-1}{2p^2}$ C) $\frac{p^2+1}{p^2-1}$ D) $\frac{p^2-1}{2p}$
15. $\tan\theta = 3$, అయిన $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ []
 A) $\frac{7}{25}$ B) 1 C) $-\frac{7}{25}$ D) $\frac{4}{25}$

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 Marks)

- $\tan\left(\frac{5\theta}{2}\right) = \sqrt{3}$, మరియు θ అల్ప కోణం అయినచో, 2θ యొక్క విలువను కనుగొనుము.
- ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో, $\tan A = \frac{12}{5}$, అయినచో $\sin A \cdot \cos A$.
- $2\left(\frac{\sin 45^\circ + \cos 45^\circ}{\sec 45^\circ + \operatorname{cosec} 45^\circ}\right) + \left(\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ}\right)$ విలువను గణించుము.
- ఒక లంబకోణ త్రిభుజం PQR లో, $\angle Q = 90^\circ$ మరియు $\operatorname{cosec} P = \frac{17}{15}$, అయిన $\tan P$, $\cos P$ ల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
- $2 \times \left(\frac{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}\right) + 3 \times \left(\frac{\sec^2 75^\circ - \tan^2 25^\circ}{\sin 90^\circ + \cos 90^\circ}\right)$ విలువను గణించుము.
- $\cot\theta$ ను $\cos\theta$ లో మరియు $\sin\theta$ లో (వేర్వేరుగా) వ్యక్తపరచుము.
- $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ మరియు $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ అయినచో $\angle B$ విలువను మరియు $\cos B$ విలువను కనుగొనుము. ($A, B < 90^\circ$)
- $\sin\theta + \cos\theta = a$ అయిన, $\sin\theta \times \cos\theta = \frac{a^2-1}{2}$ అని చూపండి.

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 Marks)

1. $(\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 + (\cos\theta - \sec\theta)^2 - (\tan\theta + \cot\theta)^2 = 1$ అని నిరూపించుము.
2. $\frac{2 \operatorname{cosec}^2 30^\circ + 3 \sin^2 60^\circ - \frac{3}{4} \tan^2 30^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ}$ విలువను గణించుము.
3. $\frac{\tan^2 60^\circ + 4 \cos^2 45^\circ + 3 \sec^2 30^\circ + 5 \cos^2 90^\circ}{\operatorname{cosec}^2 30^\circ + \sec 60^\circ - \cot^2 30^\circ}$ విలువను గణించుము.
4. $7 \sin^2\theta + 3 \cos^2\theta = 4$ అయిన, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ అని చూపుము.
5. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ అయిన, $\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ విలువను గణించుము.
6. $\sqrt{3} \tan\theta = 3 \sin\theta$ అయిన, $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ విలువను గణించుము.
7. $x = a \sec\theta + b \tan\theta$ మరియు $y = a \tan\theta + b \sec\theta$ అయిన, $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ అని చూపుము.
8. $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ అని నిరూపించుము.
9. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో, $\angle B = 90^\circ$ మరియు AB భుజము AC భుజము పొడవుల నిష్పత్తి $1 : \sqrt{2}$ అయినచో, $\frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$ విలువను గణించుము.
10. $\sin\theta = \frac{4}{5}$ అయినచో, $\frac{4 \tan\theta - 5 \cos\theta}{\sec\theta + 4 \cot\theta}$ విలువను గణించుము.

వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 Marks)

1. $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$ అయిన, $\frac{\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta}$ విలువను గణించుము.
2. $\frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin\theta - \cos\theta} + \frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = 2$ అని నిరూపించుము.

3. $\sec\theta + \tan\theta = p$ అయిన, $\sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$ అని చూపుము.

4. ఈ క్రింది వానిని నిరూపించుము.

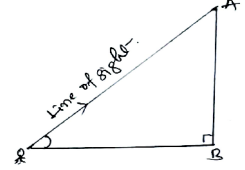
$$\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \cos A + \sin A$$

5. $\frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ అని చూపుము.

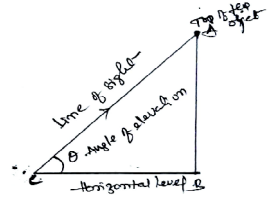
6. $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = 1 + \tan A + \cot A$ అని చూపుము.

త్రికోణమితి అనువర్తనాలు

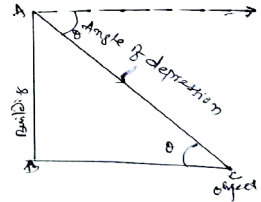
1. **దృష్టిరేఖ (Line of sight):** ఒక వస్తువుపై ఒక బిందువు నుండి పరిశీలకుని కంటిని కలిపే సరళరేఖను 'దృష్టిరేఖ' అంటారు.



2. **ఊర్ధ్వ కోణం (Angle of elevation):** క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, దృష్టిరేఖ పైన ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని 'ఊర్ధ్వ కోణం' అంటారు. ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తల పైకి ఎత్తబడుతుంది.



3. **నిమ్న కోణం (Angle of depression):** క్షితిజ సమాంతర రేఖకు దృష్టిరేఖ క్రింద ఉన్నప్పుడు, వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని 'నిమ్న కోణం' అంటారు. ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తల క్రింది వైపుకు చూస్తుంది.



4. ఒక వస్తువు యొక్క పొడవుగాని, ఎత్తునుగాని కనుగొనడానికి, రెండు వస్తువుల మధ్య దూరాన్ని లెక్కించడానికి త్రికోణమితియ నిష్పత్తులను వాడుతూ ఉంటాం.

Practice problems

Multiple Choice Questions

- ఒక ప్రత్యేక సమయంలో ఒక టవర్ యొక్క ఎత్తు మరియు దాని యొక్క నీడ పొడవుల నిష్పత్తి $1:\sqrt{3}$ అయిన, అప్పుడు సూర్యుని యొక్క ఊర్ధ్వ కోణం []
 a) 30° b) 60° c) 45° d) 90°
- ఒక ఎత్తయిన టవర్ యొక్క కొనను, దాని పాదం నుండి 200 మీటర్ల దూరం నుండి 60° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించనైనది. అప్పుడు ఆ టవర్ యొక్క ఎత్తు []
 a) $100\sqrt{3}$ మీ. b) $200\sqrt{3}$ మీ c) $\frac{200}{\sqrt{3}}$ మీ. d) $\frac{100}{\sqrt{3}}$ మీ.

3. ఒక గాలి పటం భూమి నుండి 60 మీటర్ల ఎత్తులో ఎగురుచున్నది. దానికి కట్టబడిన దారము (క్షితిజ సమాంతరం) భూమితో 60° ఏటవాలు కోణం చేయుచున్నది. అయినా దారము పొడవు =
(ఇచ్చట దారము వదులుగా లేదు అని భావించాలి) []
- a) $40\sqrt{3}$ b) $30\sqrt{3}$ c) $20\sqrt{3}$ d) $60\sqrt{3}$
4. ఒక వ్యక్తి ఒక చెట్టు యొక్క కొనను, దాని పాదం నుండి 20 మీటర్ల దూరం నుండి 45° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించనైనది. అప్పుడు ఆ చెట్టు యొక్క ఎత్తు []
- a) 40 మీ. b) 10 మీ. c) 20 మీ. d) 60 మీ.
5. ఒక ప్రత్యేక సమయంలో ఒక టవర్ యొక్క ఎత్తు మరియు దాని పొడవులు సమానం అయినప్పుడు, సూర్యుని యొక్క ఊర్ధ్వ కోణం []
- a) 45° b) 60° c) 30° d) 90°
6. సముద్రమట్టానికి కొంత ఎత్తు గల ఒక 'లైట్ హౌస్' చివరి భాగాన్ని మొదట 30° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించనైనది. ఇట్టి మొదటి పరిశీలన స్థానం నుండి 'లైట్ హౌస్' పాదం వైపు 'd' మీ. ముందుకు నడిచి, మళ్ళీ దాని చివరి భాగం పరిశీలించగా ఊర్ధ్వ కోణం 30° నుండి 60° లకు మారినది. అప్పుడు ఆ 'లైట్ హౌస్' ఎత్తు []
- a) $3\sqrt{2}d$ b) $2\sqrt{3}d$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}d$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}d$
7. 75 మీ. ఎత్తు గల ఒక టవర్ పైభాగం నుండి, దాని పాదం నుండి కొంత దూరంలో గల ఒక కారును 30° నిమ్న కోణంలో చూడనైనది. అప్పుడు కారుకు మరియు టవర్ పాదమునకు మధ్య గల దూరం []
- a) $2\sqrt{3}$ మీ. b) $50\sqrt{3}$ మీ. c) $75\sqrt{3}$ మీ. d) 150 మీ.
8. భూమిపై నిటారుగానున్న ఒక టవర్ చివరి భాగాన్ని దాని పాదం నుండి 50 మీటర్ల దూరం నుండి 45° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించనైనది. అప్పుడు ఆ టవర్ ఎత్తు = []
- a) $50\sqrt{3}$ మీ. b) 50 మీ. c) 100 మీ. d) $\frac{50}{\sqrt{3}}$ మీ.
9. ఒక గోడకు ఏటవాలుగా ఒక నిచ్చెనను వేయగా, అది భూమితో 60° ఊర్ధ్వ కోణాన్ని చేసినది. నిచ్చెన యొక్క పాదము గోడ నుండి 2 మీ. దూరంలో ఉన్నట్లయితే, నిచ్చెన పొడవు (మీటర్లలో)..... []
- a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ మీ. b) $4\sqrt{3}$ మీ. c) $2\sqrt{2}$ మీ. d) 4 మీ.

10. 'x' మరియు 'y' యూనిట్ల దూరంలో గల పరిశీలక స్థానాల నుండి ఒక నిటారైన స్థంభము కొనను పరిశీలించగా, ఊర్ధ్వ కోణాలు వరుసగా పూరక కోణాలు (అనగా θ , $90^\circ - \theta$), అప్పుడు ఆ టవర్ ఎత్తు... []

- a) xy b) \sqrt{xy} c) $\frac{x}{y}$ d) $\sqrt{\frac{x}{y}}$

Very Short Answer Questions

- భూమిపై ఒక టవర్ నిటారుగా నిలిచి ఉంది. ఆ టవర్ అడుగు భాగం నుండి 15 మీ. దూరం నుండి ఆ టవర్ పైకొన 45° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించబడింది. ఆ టవర్ ఎత్తు ఎంత?
- “సూర్యుని యొక్క ఊర్ధ్వ కోణం పెరుగుచున్న కొలది, ఒక టవర్ యొక్క నీడ యొక్క పొడవు పెరుగుతుంది” అని రాము అన్నాడు. ఇది సత్యమా? అసత్యమా?
- భూమిపై ఒక టవర్ నిటారుగా నిలిచి ఉంది. దానిపైన ఒక జెండా నిటారుగా అమర్చబడినది. ఆ టవర్ పైకొన మరియు జెండా పైకొనలు వరుసగా α , β ఊర్ధ్వ కోణాలతో పరిశీలించబడినది. ఇట్టి సందర్భానికి రేఖాచిత్రము గీయుము.
- నిటారుగా ఉన్న ఒక చెట్టు యొక్క ఎత్తు $20\sqrt{3}$ మీటర్లు. ఇట్టి చెట్టు యొక్క పైకొనను ఒక పరిశీలకుడు దాని అడుగు భాగం నుండి 20 మీ. దూరం నుండి పరిశీలించగా, అట్టి ఊర్ధ్వ కోణాన్ని కనుగొనండి.
- ఒక నిటారు గోడకు 60° ఊర్ధ్వ కోణంలో ఒక నిచ్చెన వేయబడినది. నిచ్చెన యొక్క అడుగు భాగం నుండి గోడ యొక్క అడుగు భాగానికి మధ్యగల దూరం 10 మీ. అయిన, అట్టి గోడ యొక్క ఎత్తు (నిచ్చెన ఆనుకొని ఉన్న భాగం వరకు) కనుగొనుము.
- 6 మీ. పొడవైన నిటారైన స్థంభము ఎండలో $2\sqrt{3}$ మీటర్ల పొడవు గల నీడను భూమిపై ఏర్పరచినపుడు, సూర్యుని యొక్క ఊర్ధ్వ కోణాన్ని కనుగొనుము.
- ఒక నిటారైన స్థంభము యొక్క నీడ పొడవు దాని యొక్క ఎత్తునకు సమానమైనచో, అట్టి సమయంలో సూర్యుని యొక్క ఊర్ధ్వ కోణాన్ని కనుగొనుము.
- సముద్రమట్టానికి 75 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక లైట్ హౌజ్ పైనుండి ఒక పరిశీలకుడు ఒక ఓడను 30° నిమ్నకోణంలో చూశాడు. అప్పుడు లైట్ హౌజ్ పాదము నుండి పడవకు మధ్య గల దూరాన్ని కనుగొనండి.

Short Answer Type Questions

1. భూమిపై ఒక టవర్ నిటారుగా నిలిచి ఉంది. ఒకానొక సందర్భంలో సూర్యుడు 30° ఉన్నతిలో ఉన్నప్పుడు దాని యొక్క నీడ పొడవు, అదే సూర్యుడు 60° ఉన్నతిలో ఉన్నప్పుడు దాని యొక్క నీడ పొడవు కంటే 40 మీటర్లు ఎక్కువ. అయినా అట్టి టవర్ యొక్క ఎత్తు కనుగొనుము.
2. కొంత ఎత్తున గల ఒక కొండ యొక్క శిఖరం నుండి వరుసగానున్న రెండు మైలురాళ్ళను 30° మరియు 45° నిమ్నకోణంలో పరిశీలించనైనది. అయినా ఆ కొండ ఎత్తును కనుగొనుము.
3. భూమిపై నిటారుగా నిలిచియున్న ఒక ఎత్తయిన టవర్ యొక్క కొనను, ఒక పరిశీలకుడు దాని పాదం నుండి కొంత దూరం నుండి 30° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించాడు. ఒకవేళ అట్టి పరిశీలకుడు, మొదటి పరిశీలక స్థానం నుండి టవర్ యొక్క పాదం వైపు 20 మీటర్లు ముందుకు నడిచి, మళ్ళీ ఆ టవర్ యొక్క పైకొనను పరిశీలించగా ఊర్ధ్వ కోణం, మొదటి ఊర్ధ్వ కోణం కంటే 15° ఎక్కువ అని గమనించాడు. అయినా అట్టి టవర్ ఎత్తును కనుగొనండి.
4. సముద్రమట్టానికి 100 మీటర్ల ఎత్తున గల ఒక లైట్ హౌజ్ నుండి ఒకేవైపుకు సముద్రంలో వాస్తవంగా ఒకదాని వెనుక మరొకటి గల రెండు పడవలను, లైట్ హౌజ్ పై నుండి 30° మరియు 45° నిమ్నకోణంలో పరిశీలించడం జరిగింది. అప్పుడు ఆ రెండు పడవల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనండి. ($\sqrt{3}=1.732$ ఉపయోగించుము).
5. భూమిపై నిటారుగానున్న కొంత ఎత్తయిన టవర్ పైభాగం నుండి 50 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక భవనం యొక్క పైభాగాన్ని మరియు అడుగు భాగాన్ని 30° మరియు 60° నిమ్నకోణంలో పరిశీలించనైనది. అప్పుడు అట్టి టవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.

Essay Type Answer Questions (8m)

1. భూమి నుండి నిటారుగా 250 మీటర్ల ఎత్తులో ఎగురుతున్న ఒక విమానం నుండి, ఒక నది యొక్క రెండు ఒడ్డులలో గల పడవలను 45° మరియు 60° నిమ్నకోణంలో వరుసగా పరిశీలించనైనది. అప్పుడు అట్టి నది యొక్క వెడల్పును కనుగొనుము. ($\sqrt{3}=1.732$ ఉపయోగించుము).
2. చదునుగానున్న భూమి ఉపరితలంపై 20 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక స్థంభము మరియు కొంత ఎత్తు గల ఒక టవర్ నిటారుగా (కొంత దూరంలో) ఉన్నాయి. స్థంభము యొక్క పాదం నుండి టవర్ కొనను 30° డిగ్రీల ఊర్ధ్వ కోణంలోను మరియు టవర్ యొక్క పాదం నుండి స్థంభం యొక్క కొనను 60° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించనైనది. అయిన (i) టవర్ ఎత్తు మరియు (ii) స్థంభము మరియు టవర్ మధ్య గల క్షితిజ సమాంతర దూరమును కనుగొనుము.

3. ఒక పరిశీలకుడు ఒక ఎత్తయిన భవనం చివరి భాగాన్ని కొంత దూరం నుండి 30° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించి, అట్టి పరిశీలక స్థానం నుండి భవనం యొక్క పాదం వైపు 60 మీటర్లు ముందుకు నడిచి, మళ్ళీ అట్టి భవనం చివరి భాగాన్ని 60° ఊర్ధ్వ కోణంలో పరిశీలించును. అప్పుడు ఆ భవనం ఎత్తును కనుగొనుము.
4. భూమి నుండి నిటారుగా 4000 మీటర్ల ఎత్తులో ఒక విమానం ఎగురుచున్నది మరియు అదే సమయంలో ఇట్టి విమానంనకు పైన (క్షితిజ లంబంగా) మరొక విమానం కూడా ఎగురుచున్నది. భూమిపైనున్న ఒక పరిశీలకుడు ఇట్టి రెండు విమానాలను 60° మరియు 45° ల ఊర్ధ్వ కోణాలలో వరుసగా పరిశీలించనైనది. ఆ ప్రత్యేక సమయం నందు ఆ రెండు విమానాల మధ్య గల క్షితిజ లంబ దూరాన్ని కనుగొనండి.

సంభావ్యత

- ఒక ఘటన సంభవించే అవకాశాన్ని అంచనా వేయడానికి సంభావ్యతను ఉపయోగిస్తారు. అది ఒక ఘటన యొక్క అనుకూలతను తెలియజేస్తుంది.
- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం: ఒక ప్రయోగం యొక్క ఫలితాలన్నీ తెలిసి, వాటిలో ఏ ఫలితం వస్తుందో తెలియని ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటారు.
- ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని ఫలితాలలో, 'ఒక ఫలితం E యొక్క అనుకూల పర్యవసనాల సంఖ్య' మరియు 'మొత్తం పర్యవసనాల సంఖ్య'కు గల నిష్పత్తిని ఘటన E యొక్క సంభావ్యతగా పరిగణిస్తాం. దీనిని $P(E)$ చే సూచిస్తాం. ఈ నిర్వచనం సైద్ధాంతిక సంభావ్యత నిర్వచనం అంటారు.
- $$P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసనాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసనాల సంఖ్య}}$$
- ఒక ఘటన ఖచ్చితంగా సంభవిస్తుందని తెలిస్తే దానిని 'ఖచ్చిత ఘటన' అంటారు. ఒక ఖచ్చితమైన ఘటన యొక్క అనుకూల ఘటనల సమితి ప్రతిరూప ఆవరణము అవుతుంది. కావున ఖచ్చిత ఘటన లేదా దృఢ ఘటన యొక్క సంభావ్యత '1' అవుతుంది.
- ఒక ఘటన ఎట్టి పరిస్థితుల్లోనూ సంభవించే అవకాశం లేకపోతే ఆ ఘటనను అసంభవ ఘటన అంటారు. ఒక అసంభవ ఘటన యొక్క సంభావ్యత '0 (సున్న)' అవుతుంది.
- ఒక ఘటన E యొక్క సంభావ్యత $P(E)$ విలువ $0 \leq P(E) \leq 1$
- ఒకే ఒక అనుకూల పర్యవసానం గల ఘటనను ప్రాథమిక ఘటన అంటారు. ఒక ప్రయోగంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం '1' అవుతుంది.
- ఒక ప్రయోగంలోని ఘటన E అయితే 'E కాదు' ఘటనను \bar{E} చే సూచిస్తాం. అప్పుడు $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ అవుతుంది.

- సమ సంభవ ఘటనలు: ఒక ప్రయోగంలో ఘటనలు సంభవించడానికి సమాన అవకాశాలు ఉంటే వాటిని 'సమ సంభవ ఘటనలు' అంటారు.
- పరస్పర వర్జిత ఘటనలు: ఒక ప్రయోగంలోని ఏవైనా రెండు ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మరొక ఘటన సంభవాన్ని నిరోధిస్తే ఆ రెండు ఘటనలను 'పరస్పర వర్జిత ఘటనలు' అంటారు.
- పూర్ణ ఘటనలు: ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ఘటనల సమ్మేళనం ప్రతిరూప ఆవరణము అయితే వాటిని 'పూర్ణ ఘటనలు' అంటారు.
- పూరక ఘటనలు: ఒక ప్రయోగంలోని రెండు ఘటనలు 'పరస్పర వర్జిత' మరియు 'పూర్ణ' ఘటనలు అయితే ఆ రెండు ఘటనలను 'పూరక ఘటనలు' అంటారు.

Practice problems

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. ఈ క్రింది వాటిలో ఏది ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత కానేరదు? []
a) 0 b) 1 c) $0.\overline{75125}$ d) 1.1
2. ఈ క్రింది వాటిలో ఖచ్చిత (దృఢ) ఘటన ఏది? []
a) ఒక పాచిక వేసినపుడు బొమ్మ వచ్చే ఘటన
b) ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ వచ్చే ఘటన
c) ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు బొరుసు వచ్చే ఘటన
d) ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు వచ్చే ఘటన
3. ఈ క్రింది వాటిలో అసంభవ ఘటన ఏది? []
a) ఒక పాచిక వేసినపుడు బొమ్మ వచ్చే ఘటన
b) ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ వచ్చే ఘటన
c) ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు బొరుసు వచ్చే ఘటన
d) ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు వచ్చే ఘటన
4. ఈ క్రింది వాటిలో దృఢ (ఖచ్చిత) ఘటన సంభావ్యత []
a) 0 b) 0.5 c) 1 d) 100
5. ఈ క్రింది వాటిలో అసంభవ ఘటన సంభావ్యత []
a) 0 b) 0.5 c) 1 d) 100

6. ఒక ప్రయోగంలో 8 ప్రాథమిక ఘటనలు ఉంటే, వాటిలో ఏదైనా ఒక ఘటన సంభావ్యత []
a) 8 b) $\frac{1}{8}$ c) 0.8 d) 1.8
7. ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు, వాటిపై 'ప్రధాన సంఖ్య' వచ్చే సంభావ్యత []
a) 0.5 b) 2.6 c) 0.6 d) $0.\bar{3}$
8. ఒక తరగతిలో 12 బాలురు మరియు 18 మంది బాలికలు ఉన్నారు. ఆ తరగతి నుండి ఒక విద్యార్థిని ఎంచుకుంటే, బాలికను ఎంచుకునే సంభావ్యత []
a) 0.4 b) 0.45 c) 0.9 d) 0.6
9. ఒక డబ్బాతో 1 నుండి 10 వరకు సంఖ్యలు కలిగిన కార్డులున్నాయి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డు తీస్తే, అది '3 గుణిజం' అయ్యే సంభావ్యత []
a) 0.3 b) 0.5 c) $0.\bar{3}$ d) 0.4
10. 6 తెల్లని బంతులు కలిగిన డబ్బా నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే అది తెల్లని బంతి అయ్యే ఘటన []
a) అసంభవ ఘటన b) ఖచ్చిత ఘటన
c) అసంబద్ధ ఘటన d) తెల్లని ఘటన
11. 10 ఎర్రని బంతులున్న డబ్బా నుండి ఒక బంతి యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే, అది నల్లని బంతి అయ్యే ఘటన []
a) అసంభవ ఘటన b) ఖచ్చిత ఘటన
c) అసంబద్ధ ఘటన d) ఎర్రని ఘటన
12. ఏదైనా ఒక ఘటన సంభావ్యత వ్యాప్తి []
a) $0 < P(E) < 1$ b) $-1 < P(E) < 1$ c) $0 \leq P(E) \leq 1$ d) $-1 \leq P(E) \leq 1$
13. ఒక సంచిలో ఒక తెల్లని, ఒక నల్లని మరియు ఒక ఎర్రని బంతులున్నాయి. ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే అది ఎర్రని బంతి కాని సంభావ్యత []
a) $1/3$ b) $2/3$ c) $3/2$ d) $11/3$
14. హైదరాబాద్ నగరంలో జూలై నెలలో వర్షం పడే సంభావ్యత 0.65. అదే నెలలో ఒక రోజు వర్షం పడని సంభావ్యత. []
a) 1.65 b) 0.45 c) 0.35 d) 0.25

15. ఈ క్రింది ఘటనల జతలలో పరస్పర వర్జిత ఘటనలు కానివి ఏవి? []

- a) ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు ఒక బొమ్మ వచ్చే ఘటన, ఒక బొరుసు వచ్చే ఘటన
- b) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు దానిపై 3 రావడం మరియు 6 రావడం
- c) ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుండి ఒక ముక్క తీసిన, అది నల్లది కావడం మరియు రాజు కావడం
- d) 1-100 సంఖ్యలు గల కార్డుల నుండి ఒక కార్డు తీసిన, అది ప్రధాన సంఖ్య రావడం మరియు సంయుక్త సంఖ్య రావడం

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. సమ సంభవ ఘటనలకు ఏవైనా రెండు ఉదాహరణలను రాయండి.
2. ఖచ్చిత (దృఢ) ఘటనలకు ఏవైనా రెండు ఉదాహరణలను రాయండి.
3. అసంభవ ఘటనలకు ఏవైనా రెండు ఉదాహరణలను రాయండి.
4. పూరక ఘటనలకు ఏవైనా రెండు ఉదాహరణలను రాయండి.
5. ఒక ఘటన ఖచ్చిత (దృఢ) ఘటన కాదని ఎప్పుడు చెప్పగలరు? ఎందుకు?
6. పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అనగానేమి?
7. ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు దానిపై సంయుక్త సంఖ్య రావడానికి సంభావ్యత ఎంత?
8. ఒక డబ్బాలో 1 నుండి 15 వరకు సంఖ్యలు కలిగిన కార్డులున్నాయి. దాని నుండి ఒక కార్డును యాదృచ్ఛికంగా తీసిన, అది ప్రధాన సంఖ్య రావడానికి సంభావ్యత ఎంత?
9. ఒక సంచిలో 2 తెల్లని మరియు 3 నీలిరంగు బంతులున్నాయి. దాని నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీసిన, అది నీలిరంగు బంతి కావడానికి సంభావ్యత ఎంత?
10. ఒక సంచిలో అన్ని ఆంగ్ల అక్షరాలు కలిగిన కార్డులున్నాయి. దాని నుండి ఒక కార్డును యాదృచ్ఛికంగా తీసిన, అది అచ్చు అక్షరం ఉన్న కార్డు రావడానికి సంభావ్యత ఎంత?
11. ఒక 15 బాలురు మరియు 25 మంది బాలికలు ఉన్నారు. వారి నుండి ఒక విద్యార్థిని యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొనిన, బాలికను ఎంచుకునే సంభావ్యత ఎంత?
12. తనీష్ ఒక పరీక్ష పాస్ కావడానికి సంభావ్యత 0.83. ఆమె పరీక్ష అనుత్తీర్ణత కావడానికి సంభావ్యత ఎంత?
13. ఒక ప్రదేశంలో ఒక వ్యక్తికి కరోనా సోకడానికి సంభావ్యత 0.23. ఆ ప్రదేశంలో నివసిస్తున్న అంజలికి కరోనా సోకకపోయే సంభావ్యత ఎంత?

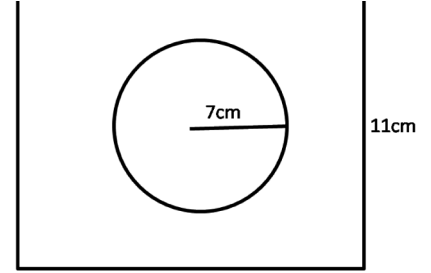
14. సాక్షి ఒక మొబైల్ ఫోన్ కొనడానికి షాపుకు వెళ్ళింది. ఒక ఫోనులో ఆమెకు 100 ఫీచర్లలో 89 ఫీచర్లు వచ్చినాయి. ఆ మొబైల్ను ఆమె కొనకపోయే సంభావ్యత ఎంత?
15. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో 10 ప్రాథమిక ఘటనలున్నాయి. ఆ ఘటనల అన్నింటి సంభావ్యతల మొత్తం ఎంత?

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

1. రెండు పాచికలు ఒకేసారి దొర్లించబడినాయి. వాటిపై సంఖ్యల మొత్తం 7 రావడానికి సంభావ్యతను కనుగొనుము.
2. రెండు నాణేలు ఒకేసారి ఎగురవేయబడినాయి. వాటిపై ఒక బొమ్మ మరియు ఒక బొరుసు వచ్చే సంభావ్యత కనుగొనుము.
3. ఒక సంచిలో 4 నీలి, 5 కాషాయ మరియు 6 ఎర్రని బంతలున్నాయి. వాటి నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీసిన అది (i) కాషాయ బంతి కావడానికి (ii) కాషాయ బంతి కాకపోవడానికి సంభావ్యత కనుగొనుము.
4. ఒక సంచిలో 1 నుండి 100 సంఖ్యల కార్డులున్నాయి. వాటి నుండి ఒక కార్డును యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే, కార్డుపై ఉన్న సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో గాని, పదలు స్థానంలో గాని 9 వచ్చే సంభావ్యత ఎంత?
5. ఒక కాగితంపై 20 మంది ఉపాధ్యాయులు, 16 మంది న్యాయవాదులు మరియు 14 మంది డాక్టర్ల మొబైల్ నెంబర్లు ఉన్నాయి. వాటి నుండి ఒక మొబైల్ నెంబర్ ఎంచుకొనగా అది (i) ఉపాధ్యాయుని నెంబర్ కావడానికి (ii) ఉపాధ్యాయుని నెంబర్ కాకపోవడానికి సంభావ్యత కనుగొనుము.
6. రెండు పాచికలు ఒకేసారి దొర్లించబడినాయి. వాటిపై వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం (i) 20 కంటే ఎక్కువ (ii) 20 కంటే తక్కువ వచ్చే సంభావ్యత కనుగొనుము.
7. ఒక LED బల్బుల తయారీదారుడు. 75 మంచి, 15 లోపం ఉన్న బల్బులను కలిపి ఇచ్చినాడు. వాటి నుండి ఒక బల్బును యాదృచ్ఛికంగా తీసిన అది (i) మంచి బల్బు (ii) లోపం ఉన్న బల్బు కావడానికి సంభావ్యత కనుగొనుము.
8. ఒక గ్రామంలో 75 మందికి కరోనా వ్యాధి సోకగా, 2925 మంది సోకని వారున్నారు. పోలీసులు కరోనా సోకిన వారిని గుర్తించే ప్రయత్నం చేయగా, ఒక వ్యక్తిని ఎంచుకుంటే ఆ వ్యక్తి కరోనా కలిగిన వ్యక్తి అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

9. ఒక పెన్నుల డబ్బాలో ఉన్న 144 బాల్పెన్నులలో 20 లోపం గల పెన్నులున్నాయి. సానియా ఆ డబ్బాలో ఉన్న పెన్ను మంచిదైతేనే కొంటుంది. దుకాణదారుడు యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్ను డబ్బా నుండి తీసిన ఆ పెన్నును ఆమె (i) కొనడానికి (ii) కొనకపోవడానికి సంభావ్యత కనుగొనుము.
10. ఒక డబ్బాలో 11 నుండి 99 వరకు సంఖ్యలున్న కార్డులున్నాయి. వాటి నుండి ఒక కార్డును యాదృచ్ఛికంగా తీసిన అది (i) వర్గ సంఖ్య ఉన్న (ii) వర్గ సంఖ్యలేని కార్డు అయ్యే సంభావ్యత కనుగొనుము.

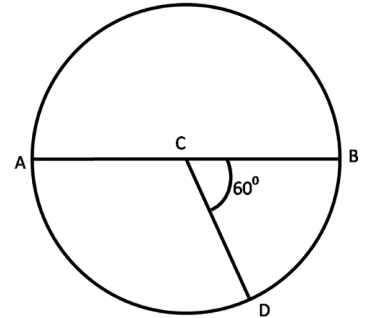
వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)



1. 14cm x 11cm మితులు కలిగిన దీర్ఘచతురస్రంలో ఒక నాణెం వేయబడింది. ఆ దీర్ఘచతురస్రంలో 7cm వ్యాసం కలిగిన వృత్తం గీయబడింది. ఆ నాణెం ఆ వృత్తంలో పడే సంభావ్యత కనుగొనుము.

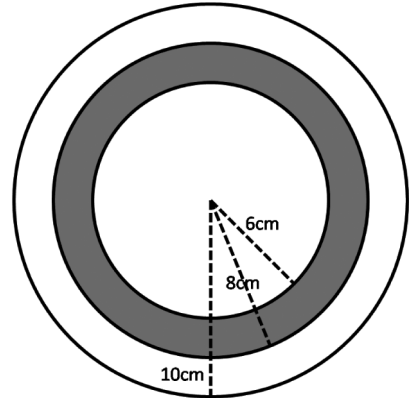
2. ఇద్దరు వినియోగదారులు ఒక దుకాణాన్ని ఒక వారంలో ఏదైనా రోజు సందర్శించాలనుకున్నారు. వారి ఆ దుకాణాన్ని (i) ఒకే రోజు (ii) వేర్వేరు రోజుల్లో సందర్శించే సంభావ్యత కనుగొనుము.?

3. ప్రక్క పటంలో చూపినట్లుగా C కేంద్రంగా గల వృత్తంలో AB వ్యాసం గీయబడింది. మరొక వ్యాసార్థం CD, వ్యాసంలో 60° చేస్తూ గీయబడింది. ఒక పాచికను ఆ వృత్తంలో యాదృచ్ఛికంగా దొర్లించిన అది ACD సెక్టార్లో పడే సంభావ్యత ఎంత?



4. $7\sqrt{3}$ cm వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తం, ఒక సమబాహు త్రిభుజానికి పరివృత్తంగా గీయబడింది. వృత్తంలో యాదృచ్ఛికంగా నాణేన్ని పడవేసిన, అది త్రిభుజం బయటపడే సంభావ్యత ఎంత?

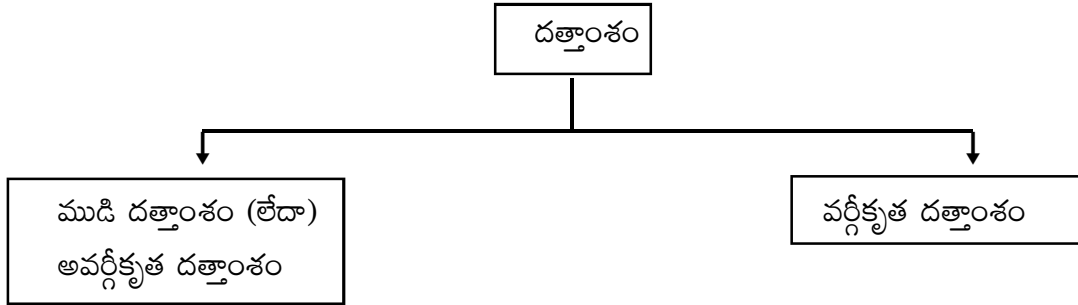
5. ఒక గురిచేసే లక్ష్యంలో 6cm, 8cm, 10cm వ్యాసార్థాలు కలిగిన వృత్తాలున్నాయి. ప్రక్క పటంలో చూపినట్లుగా ఒక ప్రాంతం షేడ్ చేయబడింది. ఒక డార్ట్ను ఆ లక్ష్యంపై విసిరిన అది షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతంపై పడే సంభావ్యత ఎంత?



సాంఖ్యికశాస్త్రం

దత్తాంశం : సంఖ్యలు, పదాల రూపంలో ఉంటూ అంతిమ ఫలితాను రాబట్టి తగు నిర్ణయాలను తీసుకోవడానికి సేకరించబడిన సమాచారాన్ని “దత్తాంశం” అని అంటాము. సమాచారంలోని సంఖ్యా వివరాలను ‘రాశులు’ అని అంటాము.

◆ దత్తాంశం రెండు రకాలుగా ఉంటుంది.



కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు : మనం సాధారణముగా సమాచారాన్ని సేకరించి, విశ్లేషించి ఆ దత్తాంశ స్వరూపం గురించి ఒక నిర్ణయానికి వస్తాము. ఈ క్రమంలో ఆ దత్తాంశాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి మనకు ‘అంకమాధ్యమం’ ‘బాహుళకం’ మరియు ‘మధ్యగతమును’ కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. వీటినే మనం కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు అని అంటాము.

◆ ఈ అధ్యాయంలో మనం కేంద్రీయ స్థాన కొలతలను

ఎ) అవర్గీకృత దత్తాంశంనకు మరియు

బి) వర్గీకృత దత్తాంశంనకు

ఎలా కనుగొంటామో నేర్చుకుంటాము.

1) అంకగణిత మధ్యమం (లేదా) సగటు (లేదా) సరాసరి

ఎ) **అవర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క సగటు :** దత్తాంశంలోని రాశుల మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చే ఫలితంను “సగటు” అని అంటాము.

◆ ఒక దత్తాంశం లోని రాశులు $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ అయితే వాటి సగటు

$$\text{సగటు } (\bar{x}) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \text{ లేదా}$$

సంక్షిప్తంగా సగటు $(\bar{x}) = \frac{\sum x_i}{n}$ అవుతుంది.

ఇక్కడ $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ ను రాశుల మొత్తం మరియు n అనేది రాశుల సంఖ్య అగును.

బి) వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క సగటు :

వివిధ పద్ధతులలో వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క సగటు

i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి

$$\text{సగటు } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

ii) ఊహించిన సగటు పద్ధతి (లేదా) విచలన పద్ధతి

$$\text{సగటు } (\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

ఇందులో $a =$ ఊహించిన సగటు

$f_i =$ తరగతి పౌనఃపున్యం

$d_i =$ తరగతి విచలనం

$d_i = x_i - a$ ($x_i =$ తరగతి మధ్య విలువ)

$\sum f_i =$ పౌనఃపున్యాల మొత్తం

2) బహుళకము

ఎ) అవర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క బహుళకం : దత్తాంశంలోని రాశులలో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయిన రాశిని ఆ దత్తాంశం యొక్క “బహుళకం” అని అంటాము.

1) ఒక దత్తాంశానికి ఉండవచ్చు లేక ఉండకపోవచ్చు.

2) ఒక దత్తాంశానికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ బహుళకాలు ఉండవచ్చు.

బి) వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క బహుళకం

$$\text{బహుళకం} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

ఇచ్చట

$l =$ బహుళక తరగతి యొక్క దిగువహద్దు

$h =$ బహుళక తరగతి పొడవు

$$f_1 = \text{బహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం}$$

$$f_0 = \text{బహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి పౌనఃపున్యం}$$

$$f_2 = \text{బహుళక తరగతి తర్వాత తరగతి పౌనఃపున్యం}$$

3) మధ్యగతము

ఎ) అవర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము : ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశులను ఆరోహణ (లేదా) అవరోహణ క్రమంలో రాసిన తర్వాత మధ్యలో ఉండే రాశిని ఆ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము అని అంటాము.

నోట్: 1. దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య బేసి సంఖ్య అయితే, మొదట ఆ రాశులను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసి మధ్యలో ఉండే దానిని మధ్యగతంగా తీసుకుంటాము.

2. ఒకవేళ దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య సరి సంఖ్య అయితే, మొదట ఆ రాశులను ఆరోహణ (లేదా) అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసి మధ్యలో ఉండే రెండు రాశుల సగటును కనుగొని, ఆ వచ్చిన విలువనే మధ్యగతంగా తీసుకుంటాము.

బి) వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము :

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

ఇక్కడ

l = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు

n = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

cf = మధ్యగత తరగతికి ముందున్న తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యం

f = మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం

h = మధ్యగత తరగతి యొక్క పొడవు

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రమం

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాన్ని గీయటానికి

X- అక్షంపై ఎగువ హద్దులను మరియు

Y- అక్షంపై ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యంను తీసుకుంటాము.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. $\frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}$ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము []
 A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{15}$
2. $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f}$ లో $d_i =$ []
 A) $a + x_i$ B) $x_i - a$ C) $x_i - \bar{x}$ D) $a - x_i$
3. k యొక్క ఏ విలువకు ఆరోహణ క్రమంలో గల దత్తాంశం 4, 6, k , 9, 10, 19 యొక్క మధ్యగతం 7.5 అగును []
 A) 7 B) 6 C) 9 D) 8
4. మొదటి 10 సహజ సంఖ్యల బహుళకం []
 A) 1 B) 10 C) 5.5 D) ఉండదు
5. ఒక దత్తాంశంలోని కొన్ని రాశుల సగటు 12 ఆ దత్తాంశంలోని ప్రతి అంశాన్ని 4 చే గుణించి 2 కలుపగా వచ్చే దత్తాంశం యొక్క సగటు []
 A) 28 B) 50 C) 18 D) 12
6. అత్యంత స్థిరమయిన కేంద్రీయ స్థాన కొలత []
 A) వ్యాప్తి B) మధ్యగతం C) సగటు D) బహుళకం
7. 5 యొక్క మొదటి నాలుగు గుణిజాల సగటు []
 A) 15.5 B) 12.5 C) 10.5 D) 20.5
8. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రంను గీయడానికి ఉపయోగించే విలువలు ఈ క్రింది వానిలో []
 A) X- అక్షంపై అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం మరియు Y- అక్షంపై తరగతుల ఎగువ హద్దులు
 B) X- అక్షంపై అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం మరియు Y- అక్షంపై తరగతుల దిగువ హద్దులు
 C) X- అక్షంపై దిగువ హద్దులు మరియు Y- అక్షంపై అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
 D) X- అక్షంపై ఎగువ హద్దులు మరియు Y- అక్షంపై ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం

9. $a - 2d, a - d, a, a + d$ మరియు $a + 2d$ సగటు []

A) $5a$ B) $3a$ C) a D) $5d$

10. ఈ క్రింది వానిలో ఏ కేంద్రీయ స్థాన కొలతను కనుగొనడానికి తరగతి మధ్య విలువను వాడుతారు? []

A) అంకగణిత మధ్యమం B) బహుళకం
C) మధ్యగతము D) వ్యాప్తి

2 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఊహించిన సగటు పద్ధతిలో సగటును కనుగొనే సూత్రంను రాసి అందులోని పదాలను విశదీకరించండి.
2. వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క బహుళకమును కనుగొనే సూత్రమును రాసి అందులోని పదాలను విశదీకరించండి
3. వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనే సూత్రమును రాసి అందులోని పదాలను విశదీకరించండి.
4. 20 లోపు గల ప్రధాన సంఖ్యల సగటును కనుగొనండి.
5. మొదటి 10 సంయుక్త సంఖ్యల మధ్యగతము 13 అనే వాదనతో మీరు ఏకీభవిస్తారా? కారణం తెల్పండి.
6. 3, 9, 4, 5, 3, 7, 2, 8, 3 ల బాహుళకమును కనుగొనండి.
7. 9, 11, 13, 18, k , 19ల సగటు k అయితే k విలువ ఎంత?
8. $\frac{x}{3}, \frac{x}{2}, \frac{x}{5}, \frac{x}{9}, \frac{x}{4}$ ($x > 0$) మధ్యగతము 5 అయితే x విలువ ఎంత?

4 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఈ క్రింది పట్టికలో 20 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశానికి సగటును కనుగొనండి.

మార్కులు	1	2	3	4	5
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	5	7	4	1

2. $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ల మధ్యగతమును కనుగొనండి.

3. ఈ క్రింది వర్గీకృత దత్తాంశానికి ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో సగటును కనుగొనండి.

C.I	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
f	1	2	4	6	3	1

4. ఈ క్రింది పట్టికలో ఒక పరీక్షలో 140 విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశానికి బహుళకమును కనుగొనుము.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
విద్యార్థుల సంఖ్య	20	24	40	36	20

5. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి మధ్యగతమును కనుగొనండి.

ఎత్తు	120 కంటే తక్కువ	140 కంటే తక్కువ	160 కంటే తక్కువ	180 కంటే తక్కువ	200 కంటే తక్కువ
విద్యార్థుల సంఖ్య	12	26	34	40	50

6. ఈ క్రింది పట్టికలో భారత క్రికెటర్లు అంతర్జాతీయ వన్డే క్రికెట్లో చేసిన పరుగులు ఇవ్వబడ్డాయి.

పరుగులు	2000-4000	4000-6000	6000-8000	8000-10,000	10000-12000
బ్యాట్మెన్ల సంఖ్య	9	8	10	2	1

పై దత్తాంశానికి బహుళకమును కనుగొనండి.

8 మార్కుల ప్రశ్నలు

1. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క సగటు 25 అయితే P విలువను కనుగొనండి.

తరగతి అంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
పౌనపున్యం	4	6	10	6	P

2. ఈ క్రింద పట్టికలో కోవిడ్ వల్ల ఒక హాస్పిటల్‌లో చేరిన వివిధ వయస్సు గల వ్యక్తుల సంఖ్య ఇవ్వబడినది.

C.I	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64
f	6	11	21	23	14	5

పై దత్తాంశానికి బాహుళకమును కనుగొనండి.

3. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును యొక్క మధ్యగతము 240 అయితే f యొక్క విలువను కనుగొనండి.

C.I	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
f	15	17	f	12	9	5	2

4. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రమును గీచి దాని నుండి మధ్యగతము కనుగొనండి.

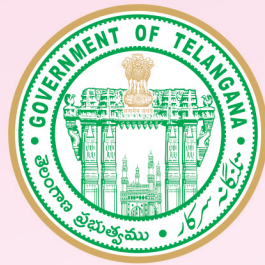
C.I	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
f	1	3	5	12	6	3

5. ఒక పాఠశాలలో జరిగిన వార్షిక రోజు కార్యక్రమంలో పాల్గొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య (వయస్సుల వారీగా) ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. ఈ దత్తాంశానికి సంచిత పౌనఃపున్య వక్రమును గీచి మధ్యగతమును కనుగొనండి.

వయస్సు	6 కంటే తక్కువ	8 కంటే తక్కువ	10 కంటే తక్కువ	12 కంటే తక్కువ	14 కంటే తక్కువ	16 కంటే తక్కువ	18 కంటే తక్కువ
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	6	12	22	42	67	76

6. ఈ క్రింది పట్టికలో ఒక ఫ్యాక్టరీలో పనిచేసే 50 వ్యక్తుల రోజువారీ వేతనాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశానికి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రమును గీచి దాని నుండి మధ్యగతమును కనుగొనండి.

రోజువారీ రూ॥లలో	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
కార్మికుల సంఖ్య	10	5	11	8	6	10



తెలంగాణ ప్రభుత్వం